

Wiederholungsklausur Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2025

23. September 2025

Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an eine prüfende Person.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
 - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
 - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
 - Lebensmittel
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie Ihren Namen in Druckbuchstaben auf jedes Blatt. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in Druckbuchstaben aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	
Unterschrift	

Rücktritt: Sie haben die Möglichkeit, notenschädlich aus der Klausur zurückzutreten. Falls Sie es möchten, kreuzen Sie folgendes Kästchen an:

☐ Ich trete von der Prüfung zurück. Meine Klausur soll mit der Note 5.0 bewertet werden.

Die erreichten Punkte und die Note werden bei der Korrektur ausgefüllt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	10	12	8	17	12	11	10	80
Erreicht								

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 80 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

Wichtige fachliche Hinweise:

- $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

V i e l E r f o l g !

Aufgabe 1 Mengen

- (a) Berechnen Sie die folgenden Mengen unter der Annahme, dass a, b, c, d, e, f verschieden sind. Eine Begründung ist nicht erforderlich und wird nicht bewertet.

i. (1 Punkt) $(\{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e, f\}) \cup (\{e, b, c, d\} \cap \{e, d, b, a\})$

Lösung:

$$\begin{aligned} & (\{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e, f\}) \cup (\{e, b, c, d\} \cap \{e, d, b, a\}) \\ &= \{c, d\} \cup (\{b, c, d, e\} \cap \{e, d, b, a\}) \\ &= \{c, d\} \cup \{b, d, e\} \\ &= \{b, c, d, e\} \end{aligned}$$

ii. (1 Punkt) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus (\{1, 3\} \cup \{5, 7\})$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus (\{1, 3\} \cup \{5, 7\}) \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} \\ &= \{2, 4, 6\} \end{aligned}$$

iii. (1 Punkt) $\{a, b\} \times (\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 4, 6, 7\})$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \{a, b\} \times (\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 4, 6, 7\}) \\ &= \{a, b\} \times \{2, 4, 6\} \\ &= \{(a, 2), (a, 4), (a, 6), (b, 2), (b, 4), (b, 6)\} \end{aligned}$$

iv. (1 Punkt) $\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, c, d, e, f\} \cap \{a, c, d, e\})$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, c, d, e, f\} \cap \{a, c, d, e\}) \\ &= \mathcal{P}(\{b, c, d, e\} \cap \{a, c, d, e\}) \\ &= \mathcal{P}(\{c, d, e\}) \\ &= \{\{\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{c, d, e\}\} \end{aligned}$$

- (b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich und wird nicht bewertet.

i. (1 Punkt) $|\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6, 7, 8\}|$

Lösung:

$$|\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6, 7, 8\}| = |\{1, 2, 3\}| \times |\{4, 5, 6, 7, 8\}| = 3 \cdot 5 = 15$$

ii. (1 Punkt) $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})|$

Lösung:

$$|\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})| = 2^{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}|} = 2^8 = 256$$

iii. (2 Punkte) $|B \setminus A|$ für beliebige endliche Mengen B und $A \subseteq B$

Lösung:

$$|B \setminus A| = |B| - |A|$$

iv. (2 Punkte) $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 2^x = y \wedge y \leq 16\}|$

Lösung:

$$|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 2^x = y \wedge y \leq 16\}| = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16)\} = 5$$

Aufgabe 2 (12 Punkte) Induktion

Sei

$$\bigcup_{x \in \{x_1, \dots, x_n\}} f(x) = f(x_1) \cup \dots \cup f(x_n)$$

die Vereinigung der Anwendung der Funktion f auf alle Elemente $x_1, \dots, x_n$.Beweisen Sie per Induktion, dass für jede endliche Menge A und B folgende Aussage gilt:

$$\bigcup_{x \in A \cup B} f(x) = \bigcup_{x \in A} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x)$$

Benutzen Sie dafür die gegebene Skizze. Markieren Sie eindeutig jede Anwendung der Induktionshypothese.

Induktion über: $|A|$ (alternativ $|B|$) Induktionsanfang: $|A| = 0$ (alternativ $|B| = 0$)

Beweis:

Lösung:Aus $|A| = 0$ folgt, dass $A = \{\}$.

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{x \in A \cup B} f(x) &= \bigcup_{x \in \{\} \cup B} f(x) && (A = \{\}) \\
 &= \bigcup_{x \in B} f(x) && (\{\} \text{ ist neutrales Elem.}) \\
 &= \{\} \cup \bigcup_{x \in B} f(x) && (\{\} \text{ ist neutrales Elem.}) \\
 &= \bigcup_{x \in \{\}} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x) && (\text{Def. } \bigcup) \\
 &= \bigcup_{x \in A} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x) && (A = \{\})
 \end{aligned}$$

Der Beweis ist analog für eine Induktion über $|B|$.

Induktionsschritt: $|A| = n + 1$ (**alternativ** $|B| = n + 1$)

Induktionshypothese (IH):

Lösung:

Für jede Menge C mit $|C| = n$, gilt $\bigcup_{x \in C \cup B} f(x) = \bigcup_{x \in C} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x)$.

Beweis:

Lösung:

Aus $|A| = n + 1$ folgt, dass es ein Element $a \in A$ gibt. Wir setzen $A' := A \setminus \{a\}$. Daraus folgt $|A'| = n$, was heißt, dass wir die Induktionshypothese für A' anwenden dürfen. Aus der Definition von A' folgt zusätzlich $A = \{a\} \cup A'$.

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{x \in A \cup B} f(x) &= \bigcup_{x \in \{a\} \cup A' \cup B} f(x) && (A = \{a\} \cup A') \\
 &= f(a) \cup \bigcup_{x \in A' \cup B} f(x) && (\text{Def. } \bigcup) \\
 &= f(a) \cup \bigcup_{x \in A'} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x) && (\text{IH}) \\
 &= \bigcup_{x \in \{a\} \cup A'} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x) && (\text{Def. } \bigcup) \\
 &= \bigcup_{x \in A} f(x) \cup \bigcup_{x \in B} f(x) && (A = \{a\} \cup A')
 \end{aligned}$$

Der Beweis ist analog für eine Induktion über $|B|$.

Aufgabe 3 Relationen

Gegeben sei die Relation

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; 2x + y \text{ ist gerade}\}.$$

- (a) (2 Punkte) Ist R reflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

☐ Ja ☒ **Nein**

Lösung:

Nein, denn $(1, 1) \notin R$, da $2 \cdot 1 + 1 = 3$ ungerade.

- (b) (2 Punkte) Ist R transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

☒ **Ja** ☐ Nein

Lösung:

Ja. Seien $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$. Dann ist $2a + b$ gerade und $2b + c$ gerade. Hieraus folgt, dass b und insbesondere c gerade sind. $2a + c$ ist somit auch gerade. $\Rightarrow (a, c) \in R$.

Zur Erinnerung: $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; 2x + y \text{ ist gerade}\}$.

- (c) (2 Punkte) Ist R antisymmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

☐ Ja ☒ **Nein**

Lösung:

Nein, denn $(0, 2) \in R$ ($2 \cdot 0 + 2 = 2$ gerade) und $(2, 0) \in R$ ($2 \cdot 2 + 0 = 4$ gerade), aber $0 \neq 2$.

- (d) (2 Punkte) Ist R eine partielle Ordnung? Begründen Sie anhand Ihrer Antworten zu den vorherigen Teilaufgaben.

☐ Ja ☒ **Nein**

Lösung:

Nein, weil nicht antisymmetrisch und nicht reflexiv.

Aufgabe 4 Algebraische Strukturen

Gegeben sei die algebraische Struktur $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ mit

$$(w, x) \star (y, z) = (w \cdot z + x \cdot y, x \cdot z)$$

für alle $(w, x), (y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- (a) (4 Punkte) Ist $\star$ assoziativ? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einer Widerlegung. Geben Sie die zu beweisende oder zu widerlegende Formel explizit an.

✓ **Ja** ☐ **Nein**

Formel: $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. ((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) = (a, b) \star ((c, d) \star (e, f))$

Beweis bzw. Widerlegung:

Lösung:

Für alle $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} ((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) &= (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d) \star (e, f) \\ &= ((a \cdot d + b \cdot c) \cdot f + (b \cdot d) \cdot e, (b \cdot d) \cdot f) \\ &= (a \cdot d \cdot f + b \cdot c \cdot f + b \cdot d \cdot e, b \cdot d \cdot f) \\ &= (a \cdot (d \cdot f) + b \cdot (c \cdot f + d \cdot e), b \cdot (d \cdot f)) \\ &= (a, b) \star (c \cdot f + d \cdot e, d \cdot f) \\ &= (a, b) \star ((c, d) \star (e, f)) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität von Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ benutzt.

Zur Erinnerung: $(w, x) \star (y, z) = (w \cdot z + x \cdot y, x \cdot z)$ für alle $(w, x), (y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- (b) (4 Punkte) Hat $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ ein neutrales (d.h. links- und rechtsneutrales) Element? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einer Widerlegung. Geben Sie die zwei zu beweisenden oder zu widerlegenden Formeln explizit an.

☒ **Ja** ☐ **Nein**

Formel 1: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. (a, b) \star (0, 1) = (a, b)$

Formel 2: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. (0, 1) \star (a, b) = (a, b)$

Beweis bzw. Widerlegung:

Lösung:

Wir suchen zuerst ein rechtsneutrales Element $(e_1, e_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sodass für alle $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (a, b) \star (e_1, e_2) &= (a, b) \\
 \iff (a \cdot e_2 + b \cdot e_1, b \cdot e_2) &= (a, b) && \text{(also } e_2 = 1) \\
 \iff (a \cdot 1 + b \cdot e_1, b \cdot 1) &= (a, b) \\
 \iff (a + b \cdot e_1, b) &= (a, b) && \text{(also } e_1 = 0) \\
 \iff (a + b \cdot 0, b) &= (a, b) \\
 \iff (a, b) &= (a, b)
 \end{aligned}$$

Das rechtsneutrale Element ist also $(0, 1)$ und ist sogar linksneutral, weswegen es ein neutrales Element von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ ist:

$$\begin{aligned}
 (a, b) \star (0, 1) &= (a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1) = (a, b) \\
 (0, 1) \star (a, b) &= (0 \cdot b + 1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b)
 \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $(w, x) \star (y, z) = (w \cdot z + x \cdot y, x \cdot z)$ für alle $(w, x), (y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- (c) (4 Punkte) Hat $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ für jedes Element ein inverses (d. h. links- und rechtsinverses) Element? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einer Widerlegung. Geben Sie die zwei zu beweisenden oder zu widerlegenden Formeln explizit an.

☐ Ja ☒ **Nein**

Formel 1: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \exists (a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. (a', b') \star (a, b) = (0, 1)$

Formel 2: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \exists (a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. (a, b) \star (a', b') = (0, 1)$

Beweis bzw. Widerlegung:

Lösung:

Wir suchen zuerst für jedes Element $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein linksinverses Element $(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (a', b') \star (a, b) &= (0, 1) \\ \iff (a' \cdot b + b' \cdot a, b' \cdot b) &= (0, 1) \\ \iff (a' \cdot b + b' \cdot a = 0) \wedge (b' \cdot b &= 1) \end{aligned}$$

Es gibt nicht für jedes b ein $b' \in \mathbb{Z}$, sodass $b' \cdot b = 1$. Daraus folgt, dass nicht jedes Element ein linksinverses Element hat.

Wir suchen dann für jedes Element $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein rechtsinverses Element $(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (a, b) \star (a', b') &= (0, 1) \\ \iff (a \cdot b' + b \cdot a', b \cdot b') &= (0, 1) \\ \iff (a \cdot b' + b \cdot a' = 0) \wedge (b \cdot b' &= 1) \end{aligned}$$

Es gibt nicht für jedes b ein $b' \in \mathbb{Z}$, sodass $b \cdot b' = 1$. Daraus folgt, dass nicht jedes Element ein rechtsinverses Element hat.

Zur Erinnerung: $(w, x) \star (y, z) = (w \cdot z + x \cdot y, x \cdot z)$ für alle $(w, x), (y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- (d) (4 Punkte) Ist $\star$ kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einer Widerlegung. Geben Sie die zu beweisende oder zu widerlegende Formel explizit an.

☒ **Ja** ☐ **Nein**

Formel: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. (a, b) \star (c, d) = (c, d) \star (a, b)$

Beweis bzw. Widerlegung:

Lösung:

Für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} (a, b) \star (c, d) &= (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d) \\ &= (d \cdot a + c \cdot b, d \cdot b) \\ &= (c, d) \star (a, b) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Kommutativität von Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ benutzt.

- (e) (1 Punkt) Kreuzen Sie basierend auf Ihren Antworten für die vorherigen Teilaufgaben an.

Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ eine Halbgruppe?	☒ Ja	☐ Nein
Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ ein Monoid?	☒ Ja	☐ Nein
Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ eine Gruppe?	☐ Ja	☒ Nein
Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ eine abelsche Gruppe?	☐ Ja	☒ Nein

Aufgabe 5 (12 Punkte) Polynome

Berechnen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome $4x^5 + 6x^4 + 6x^2 + 4x$ und $6x^3 + 3x^2 + 1$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$. Schreiben Sie jeden Zwischenschritt explizit. (Nicht alle Zeilen müssen verwendet werden.)

Schritt 1: $4x^5 + 6x^4 + 6x^2 + 4x$ mod $6x^3 + 3x^2 + 1$ über $\mathbb{Z}_7$

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
4	6	0	6	4	0	
-	4	2	0	3		$= 3x^2 \cdot (6x^3 + 3x^2 + 1)$
	0	4	0	3	4	0
-		4	2	0	3	$= 3x \cdot (6x^3 + 3x^2 + 1)$
		0	5	3	1	0
-			5	6	0	$= 2 \cdot (6x^3 + 3x^2 + 1)$
			0	4	1	5
-						
-						

Schritt 2: $6x^3 + 3x^2 + 1$ mod $4x^2 + x + 5$ über $\mathbb{Z}_7$

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
		6	3	0	1	
-		6	5	4		$= 5x \cdot (4x^2 + x + 5)$
		0	5	3	1	
-			5	3	1	$= 3 \cdot (4x^2 + x + 5)$
			0	0	0	
-						
-						
-						

Größter gemeinsamer Teiler:

Lösung:

Damit ist $4x^2 + x + 5$ ein größter gemeinsamer Teiler und ebenso ist jedes Vielfache in $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$: $x^2 + 2x + 3$, $2x^2 + 4x + 6$, $3x^2 + 6x + 2$, $4x^2 + x + 5$, $5x^2 + 3x + 1$, $6x^2 + 5x + 4$.

Aufgabe 6 Aussagenlogik

(a) Gegeben sei folgende Formel $\phi = x_1 \rightarrow (x_2 \vee \neg(x_3 \wedge x_4) \vee x_4)$.

- i. (4 Punkte) Füllen Sie die Wahrheitstabelle der Formel ϕ aus. (Sie dürfen die leere Spalte für Zwischenschritte benutzen, diese werden allerdings nicht bewertet.)

x_1	x_2	x_3	x_4	$\overbrace{x_3 \wedge x_4}^a$	$\overbrace{\neg a}^b$	$\overbrace{b \vee x_4}^c$	$\overbrace{x_2 \vee c}^d$	$\overbrace{x_1 \rightarrow d}^{\phi}$
0	0	0	0	-	-	-	-	1
0	0	0	1	-	-	-	-	1
0	0	1	0	-	-	-	-	1
0	0	1	1	-	-	-	-	1
0	1	0	0	-	-	-	-	1
0	1	0	1	-	-	-	-	1
0	1	1	0	-	-	-	-	1
0	1	1	1	-	-	-	-	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	-	-	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	-	-	1	1	1
1	1	0	0	-	-	-	1	1
1	1	0	1	-	-	-	1	1
1	1	1	0	-	-	-	1	1
1	1	1	1	-	-	-	1	1

Lösung:

Die obere Hälfte ist wahr, weil die Annahme x_1 der Implikation falsch ist. Das untere Viertel ist wahr, weil die linke Seite x_2 der Disjunktion wahr ist. Aus einem ähnlichen Grund kann die rechte Seite x_4 der anderen Disjunktion die Berechnung beschleunigen.

- ii. (1 Punkt) Kreuzen Sie basierend auf Ihren Antworten für die vorherige Teilaufgabe an.

Ist die Formel ϕ eine Tautologie? ☒ **Ja** ☐ Nein

Ist die Formel ϕ erfüllbar? ☒ **Ja** ☐ Nein

Ist die Formel ϕ unerfüllbar? ☐ Ja ☒ **Nein**

Lösung:

(b) (2 Punkte) Gegeben sei die Formel ψ mit folgender Wahrheitstabelle:

a	b	c	ψ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Schreiben Sie eine zur Formel ψ äquivalente Formel in konjunktiver Normalform.

Lösung:

$$(a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

- (c) (4 Punkte) Betrachtet wird ein Resolutionskalkül, welches Klauseln als Mengen von Literalen auffasst und aus folgender Regel besteht:

$$\frac{C \vee x \quad D \vee \neg x}{C \vee D}$$

Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass folgende Formel in konjunktiver Normalform unerfüllbar ist:

$$\underbrace{(\neg b \vee \neg c)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg b \vee c)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\neg a \vee b \vee c)}_{C_3} \wedge \underbrace{(a \vee b)}_{C_4} \wedge \underbrace{(\neg a \vee \neg c)}_{C_5}$$

Lösung:

$$\begin{array}{ll} C_6 = \neg b & (\text{aus } C_1 \text{ und } C_2) \\ C_7 = \neg a \vee b & (\text{aus } C_3 \text{ und } C_5) \\ C_8 = b & (\text{aus } C_4 \text{ und } C_7) \\ C_9 = \perp & (\text{aus } C_6 \text{ und } C_8) \end{array}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte) Prädikatenlogik

Leiten Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (siehe letzte Seite) her:

$$\exists x(R(x) \rightarrow \forall x(S(x))) \Rightarrow \forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))$$

(Permutationen müssen **nicht** angegeben werden. Sie dürfen das Blatt mit den Schlussregeln aus der Klausur heraustrennen.)

Lösung:**Lineare Darstellung:**

1	$R(a) \Rightarrow R(a), S(b)$	(Axiom)	
2	$R(a), S(b) \Rightarrow S(b)$	(Axiom)	
3	$R(a), \underline{\forall x(S(x))} \Rightarrow S(b)$	($\forall$ -L)	aus 2
4	$R(a), \underline{R(a) \rightarrow \forall x(S(x))} \Rightarrow S(b)$	($\rightarrow$ -L)	aus 1, 3
5	$R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \underline{R(a) \rightarrow S(b)}$	($\rightarrow$ -R)	aus 4
6	$R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \underline{\exists x(R(x) \rightarrow S(b))}$	($\exists$ -R)	aus 5
7	$R(\underline{a}) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \underline{\forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))}$	($\forall$ -R)	aus 6
8	$\underline{\exists x(R(x) \rightarrow \forall x(S(x)))} \Rightarrow \forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))$	($\exists$ -L)	aus 7

Die jeweiligen Änderungen in jeder Sequenz sind unterstrichen. Regeln mit Eigenvariablenbedingung (EVB) sind **rot** markiert.

Baumdarstellung:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{R(a) \Rightarrow R(a), S(b)} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\frac{}{R(a), S(b) \Rightarrow S(b)} \text{ (Axiom)}}{R(a), \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\forall\text{-L}) \\
 \frac{}{R(a) \Rightarrow R(a), S(b)} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\frac{\frac{}{R(a), S(b) \Rightarrow S(b)} \text{ (Axiom)}}{R(a), \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\forall\text{-L})}{R(a), R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-L}) \\
 \frac{}{R(a) \Rightarrow R(a), S(b)} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{}{R(a), S(b) \Rightarrow S(b)} \text{ (Axiom)}}{R(a), \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\forall\text{-L})}{R(a), R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-L})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow R(a) \rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-R}) \\
 \frac{}{R(a) \Rightarrow R(a), S(b)} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{R(a), S(b) \Rightarrow S(b)} \text{ (Axiom)}}{R(a), \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\forall\text{-L})}{R(a), R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-L})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow R(a) \rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-R})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \exists x(R(x) \rightarrow S(b))} (\exists\text{-R}) \\
 \frac{}{R(a) \Rightarrow R(a), S(b)} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{R(a), S(b) \Rightarrow S(b)} \text{ (Axiom)}}{R(a), \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\forall\text{-L})}{R(a), R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-L})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow R(a) \rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-R})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \exists x(R(x) \rightarrow S(b))} (\exists\text{-R})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))} (\forall\text{-R EVB}) \\
 \frac{}{R(a) \Rightarrow R(a), S(b)} \text{ (Axiom)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{R(a), S(b) \Rightarrow S(b)} \text{ (Axiom)}}{R(a), \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\forall\text{-L})}{R(a), R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-L})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow R(a) \rightarrow S(b)} (\rightarrow\text{-R})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \exists x(R(x) \rightarrow S(b))} (\exists\text{-R})}{R(a) \rightarrow \forall x(S(x)) \Rightarrow \forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))} (\forall\text{-R EVB})}{\exists x(R(x) \rightarrow \forall x(S(x))) \Rightarrow \forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))} (\exists\text{-L EVB})
 \end{array}$$

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta} (Perm-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} (Perm-R)$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} (Contr-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (Contr-R)$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge-R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee-R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} (\rightarrow-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow-R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} (\neg-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} (\neg-R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x:t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x:y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln $(\forall-R)$ und $(\exists-L)$ gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.