

# Klausur Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2025

5. August 2025

## Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an eine prüfende Person.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
  - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
  - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
  - Lebensmittel
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie Ihren Namen in Druckbuchstaben auf jedes Blatt. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in Druckbuchstaben aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	
Unterschrift	

**Rücktritt:** Sie haben die Möglichkeit, notenschädlich aus der Klausur zurückzutreten. Falls Sie es möchten, kreuzen Sie folgendes Kästchen an:

Ich trete von der Prüfung zurück. Meine Klausur soll mit der Note 5.0 bewertet werden.

Die erreichten Punkte und die Note werden bei der Korrektur ausgefüllt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma$
Punkte	12	12	8	12	12	12	12	80
Erreicht								

**Note:** \_\_\_\_\_

**Wichtige Hinweise zur Klausur:**

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 80 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

**Wichtige fachliche Hinweise:**

- $\mathbb{N}$  beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

**V i e l   E r f o l g !**

**Aufgabe 1** Mengen

(a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. (1 Punkt)  $(\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\}) \cap (\{a, b, c\} \cup \{c, e, e, f\})$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
& (\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\}) \cap (\{a, b, c\} \cup \{c, e, e, f\}) \\
&= \{a, b, c\} \cup (\{c, d, e\} \cap \{c, e, e, f\}) \\
&= \{a, b, c\} \cup (\{c, d, e\} \cap \{c, e, f\}) \\
&= \{a, b, c\} \cup \{c, e\} \\
&= \{a, b, c, e\}
\end{aligned}$$

ii. (1 Punkt)  $\{1, 2\} \times \{\{3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\}\}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
& \{1, 2\} \times \{\{3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\}\} \\
&= \{1, 2\} \times \{\{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\}\} \\
&= \{1, 2\} \times \{\{4, 5\}\} \\
&= \{(1, \{4, 5\}), (2, \{4, 5\})\}
\end{aligned}$$

iii. (1 Punkt)  $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\} \setminus (\{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9\}))$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}(\{1, 2, 3\} \setminus (\{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9\})) \\
&= \mathcal{P}(\{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}) \\
&= \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \\
&= \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. (1 Punkt)  $|\{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}|$

**Lösung:**

$$|\{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}| = |\{1, 2, 3, 4\}| \times |\{5, 6, 7, 8\}| = 4 \cdot 4 = 16$$

ii. (1 Punkt)  $|\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f, g, h\})|$

**Lösung:**

$$|\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f, g, h\})| = 2^{|\{a, b, c, d, e, f, g, h\}|} = 2^8 = 256$$

iii. (1 Punkt)  $|\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(\{\})|$  für eine beliebige endliche Menge  $A$

**Lösung:**

$$|\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(\{\})| = 2^{|A|} - 2^{|\{\}|} = 2^{|A|} - 2^0 = 2^{|A|} - 1$$

iv. (1 Punkt)  $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x < y \wedge y < 4\}|$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} & |\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x < y \wedge y < 4\}| \\ &= |\{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\}| \\ &= 6 \end{aligned}$$

- (c) (5 Punkte) Beweisen Sie durch zwei Inklusionsteilbeweise, dass für jede Mengen  $A, B, C$  folgende Aussage gilt:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

**Lösung:**

Aus der Antisymmetrie von  $\subseteq$  müssen wir zwei Fälle beweisen:

- Fall  $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ :

Sei  $x \in (A \setminus B) \setminus C$ . Daraus folgen  $x \in A$  und  $x \notin B$  und  $x \notin C$ . Aus  $x \notin B$  folgt  $x \notin B \setminus C$ . Aus  $x \in A$  und  $x \notin C$  und  $x \notin B \setminus C$  folgt  $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ , was zu beweisen war.

- Fall  $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$ :

Sei  $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ . Daraus folgen  $x \in A$  und  $x \notin C$  und  $x \notin (B \setminus C)$ . Aus  $x \notin C$  und  $x \notin (B \setminus C)$  folgt  $x \notin B$ . Aus  $x \in A$  und  $x \notin B$  und  $x \notin C$  folgt  $x \in (A \setminus B) \setminus C$ , was zu beweisen war.

**Aufgabe 2** (12 Punkte) Induktion

Beweisen Sie per Induktion, dass für jede endliche Menge  $M$  folgende Aussage gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Benutzen Sie dafür die gegebene Skizze. Markieren Sie eindeutig jede Anwendung der Induktionshypothese.

Induktion über: \_\_\_\_\_  $|M|$  \_\_\_\_\_

Induktionsanfang: \_\_\_\_\_  $|M| = 0$  \_\_\_\_\_

Beweis:

**Lösung:**

Aus  $|M| = 0$  folgt, dass  $M = \{\}$ . Dann gilt:  $|\mathcal{P}(\{\})| = |\{\{\}\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\{\}|}$

Induktionsschritt: \_\_\_\_\_  $|M| = n + 1$  \_\_\_\_\_

Induktionshypothese (IH): **Für jede Menge  $A$  mit  $|A| = n$ , gilt  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .**

Beweis:

**Lösung:**

Aus  $|M| = n + 1$  folgt, dass es ein Element  $x \in M$  gibt. Setze  $M' := M \setminus \{x\}$  mit folgender Kardinalität:

$$|M'| = n \tag{1}$$

Jede Teilmenge von  $M$  ist entweder eine Teilmenge von  $M'$ , oder eine Teilmenge von  $M'$  vereinigt mit dem Element  $x$  (also enthält  $x$ ). Wir können  $\mathcal{P}(M)$  also in zwei disjunkte Teilmengen zerlegen:

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M') \uplus \{N \cup \{x\}; N \in \mathcal{P}(M')\} \tag{2}$$

Außerdem gilt:

$$|\mathcal{P}(M')| = |\{N \cup \{x\}; N' \in \mathcal{P}(M')\}| \tag{3}$$

Die Anzahl der Teilmengen von  $M$  ist also

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(M)| &= |\mathcal{P}(M') \uplus \{N \cup \{x\}; N \in \mathcal{P}(M')\}| && \text{aus (2)} \\ &= |\mathcal{P}(M')| + |\{N \cup \{x\}; N \in \mathcal{P}(M')\}| \\ &= |\mathcal{P}(M')| + |\mathcal{P}(M')| && \text{aus (3)} \\ &= 2 \cdot |\mathcal{P}(M')| \\ &= 2 \cdot 2^{|M'|} && \text{aus IH} \\ &= 2 \cdot 2^n && \text{aus (1)} \\ &= 2^{n+1} \\ &= 2^{|M|} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3** Homomorphismen

Sei  $L$  die Menge aller Listen von ganzen Zahlen, das heißt, die Menge aller Listen der Form  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , wobei  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ .

Beispiele:

- $[-1, 2, 3] \in L$
- $[0, 1, 6, -9, 0, 2] \in L$
- $[] \in L$  (die *leere Liste*)

Die Operation  $\circ$  konkateniert zwei Listen:

$$[x_1, \dots, x_n] \circ [y_1, \dots, y_m] := [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

Beispiele:

- $[1, 2, 5] \circ [1, 3, 4, 6] = [1, 2, 5, 1, 3, 4, 6]$
- $[] \circ [0, 1, 6, -9, 0, 2] = [0, 1, 6, -9, 0, 2]$

(a) Sei  $s : L \rightarrow L$  eine Funktion von  $(L, \circ)$  nach  $(L, \circ)$ , welche die Elemente einer Liste absteigend sortiert (z. B.  $s([3, -1, 2, -1, 0]) = [3, 2, 0, -1, -1]$ ).

i. (2 Punkte) Ist  $s$  ein Homomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

Ja     **Nein**

**Lösung:**

$$s([0]) \circ s([1]) = [0] \circ [1] = [0, 1], \text{ aber } s([0] \circ [1]) = s([0, 1]) = [1, 0].$$

ii. (2 Punkte) Ist  $s$  ein Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

Ja     **Nein**

**Lösung:**

Die Funktion  $s$  ist kein Homomorphismus und kann deswegen kein Isomorphismus sein.

- (b) Sei  $g : L \rightarrow L$  eine Funktion von  $(L, \circ)$  nach  $(L, \circ)$ , welche in einer Liste alle Zahlen um 2 inkrementiert (z. B.  $g([-1, 4, 6]) = [1, 6, 8]$ ).
- i. (2 Punkte) Ist  $g$  ein Homomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.  
 **Ja**    **Nein**

**Lösung:**

Das Inkrementieren erfolgt komponentenweise. Es macht keinen Unterschied, ob die Listen zuerst konkateniert werden und dann die Einträge um 2 inkrementiert werden, oder ob erst die Einträge in beiden Listen um 2 inkrementiert werden und dann die Listen konkateniert werden, d. h.  $g([x_1, \dots, x_n]) \circ g([y_1, \dots, y_m]) = h([x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m])$ .

- ii. (2 Punkte) Ist  $g$  ein Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.  
 **Ja**    **Nein**

**Lösung:**

Es gibt eine eindeutige Umkehr-Funktion.  $g^{-1}$  ist nämlich die Funktion, die alle Elemente einer Liste um 2 dekrementiert.

**Aufgabe 4** Algebraische Strukturen

Gegeben sei die algebraische Struktur  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$  mit  $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b + d + a \cdot c)$  für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

- (a) (3 Punkte) Ist  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$  eine Halbgruppe? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

**Ja**    **Nein**

**Lösung:**

Die Funktion  $\star$  ist assoziativ:  $((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) = (a, b) \star ((c, d) \star (e, f))$  für alle  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ .

Linke Seite:

$$\begin{aligned} ((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) &= (a + c, b + d + a \cdot c) \star (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d + a \cdot c) + f + (a + c) \cdot e) \\ &= (a + c + e, b + d + a \cdot c + f + a \cdot e + c \cdot e) \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} (a, b) \star ((c, d) \star (e, f)) &= (a, b) \star (c + e, d + f + c \cdot e) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f + c \cdot e) + a \cdot (c + e)) \\ &= (a + c + e, b + d + f + c \cdot e + a \cdot c + a \cdot e) \\ &= (a + c + e, b + d + a \cdot c + f + a \cdot e + c \cdot e) \end{aligned}$$

Beide Seiten sind also gleich.

Hierbei haben wir die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität von  $+$  und  $\cdot$  benutzt.

- (b) (3 Punkte) Ist  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$  ein Monoid? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

**Ja**    **Nein**

**Lösung:**

Die Struktur  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$  ist eine Halbgruppe und  $(0, 0)$  ist das neutrale Element für alle  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ :

$$(a, b) \star (0, 0) = (a + 0, b + 0 + a \cdot 0) = (a, b)$$

$$(0, 0) \star (a, b) = (0 + a, 0 + b + 0 \cdot b) = (a, b)$$

- (c) (3 Punkte) Ist  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$  eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

**Ja**    **Nein**

**Lösung:**

Die Struktur  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$  ist ein Monoid und jedes Element  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  hat ein inverses Element  $(a, b)^{-1} = (a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}(a, b) \star (a', b') = (0, 0) &\Leftrightarrow (a + a', b + b' + a \cdot a') = (0, 0) && \text{also } a' = -a \\ &\Leftrightarrow (a - a, b + b' + a \cdot -a) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow (0, b + b' - a^2) = (0, 0) && \text{also } b' = -b + a^2 \\ &\Leftrightarrow (0, b + (-b + a^2) - a^2) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow (0, 0) = (0, 0)\end{aligned}$$

Es gilt also  $(a, b)^{-1} = (-a, -b + a^2)$ .

- (d) (3 Punkte) Ist  $\star$  kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

**Ja**    **Nein**

**Lösung:**

Für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\begin{aligned}(a, b) \star (c, d) &= (a + c, b + d + a \cdot c) \\ &= (c + a, b + d + a \cdot c) \\ &= (c + a, d + b + c \cdot a) \\ &= (c, d) \star (a, b)\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Kommutativität von  $+$  und  $\cdot$  benutzt.

**Aufgabe 5** (12 Punkte) Polynome

Berechnen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome  $x^5 + x^3 + x^2 + 3x + 2$  und  $x^2 + 3x + 2$  über dem Körper  $\mathbb{Z}_5$ . Schreiben Sie jeden Zwischenschritt explizit. (Nicht alle Zeilen müssen verwendet werden.)

Schritt 1:  $x^5 + x^3 + x^2 + 3x + 2$  mod  $x^2 + 3x + 2$

$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$		
1	0	1	1	3	2		
-	1	3	2			$= x^3 \cdot (x^2 + 3x + 2)$	
	0	2	4	1	3	2	
-		2	1	4		$= 2x^2 \cdot (x^2 + 3x + 2)$	
		0	3	2	3	2	
-			3	4	1	$= 3x \cdot (x^2 + 3x + 2)$	
			0	3	2	2	
-				3	4	1	$= 3 \cdot (x^2 + 3x + 2)$
				0	3	1	$= 3x + 1$
-							

Schritt 2:  $x^2 + 3x + 2$  mod  $3x + 1$

$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$	
			1	3	2	
-			1	2		$= 2x \cdot (3x + 1)$
			0	1	2	
-				1	2	$= 2 \cdot (3x + 1)$
				0	0	
-						
-						
-						

Größter gemeinsamer Teiler:

**Lösung:**

Damit ist  $3x + 1$  ein größter gemeinsamer Teiler und ebenso ist jedes Vielfache in  $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ :  $x + 2$ ,  $4x + 3$ ,  $2x + 4$ .

**Aufgabe 6** Aussagenlogik(a) Gegeben sei folgende Formel  $\phi = x_1 \vee (((x_1 \vee x_4) \rightarrow (x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow (\neg x_3))$ .i. (4 Punkte) Füllen Sie die Wahrheitstabelle der Formel  $\phi$  aus. (Sie dürfen die leere Spalte für Zwischenschritte benutzen, diese werden allerdings nicht bewertet.)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\overbrace{x_1 \vee x_4}^a$	$\overbrace{x_2 \wedge x_3}^b$	$\overbrace{a \rightarrow b}^c$	$\overbrace{\neg x_3}^d$	$\overbrace{c \leftrightarrow d}^e$	$\overbrace{x_1 \vee e}^{\phi}$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	-	-	-	-	-	1
1	0	0	1	-	-	-	-	-	1
1	0	1	0	-	-	-	-	-	1
1	0	1	1	-	-	-	-	-	1
1	1	0	0	-	-	-	-	-	1
1	1	0	1	-	-	-	-	-	1
1	1	1	0	-	-	-	-	-	1
1	1	1	1	-	-	-	-	-	1

ii. (1 Punkt) Ist die Formel  $\phi$  tautologisch, erfüllbar, unerfüllbar?tautologisch  Ja  **Nein**erfüllbar  **Ja**  Neinunerfüllbar  Ja  **Nein**

- iii. (2 Punkte) Schreiben Sie eine zur Formel  $\phi$  äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. (Dabei kann die oben ausgefüllte Wahrheitstabelle nützlich sein.)

**Lösung:**

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

- (b) (5 Punkte) Betrachtet wird ein Resolutionskalkül, welches Klauseln als Mengen von Literalen auffasst und aus folgender Regel besteht:

$$\frac{C \vee a \quad D \vee \neg a}{C \vee D}$$

Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass folgende Formel in konjunktiver Normalform unerfüllbar ist:

$$\underbrace{(a \vee d)}_{C_1} \wedge \underbrace{(a \vee b \vee c \vee d)}_{C_2} \wedge \underbrace{(b \vee \neg d)}_{C_3} \wedge \underbrace{(\neg b \vee e)}_{C_4} \wedge \underbrace{(\neg b \vee \neg e)}_{C_5} \wedge \underbrace{(\neg a \vee f)}_{C_6} \wedge \underbrace{(\neg a \vee \neg f)}_{C_7}$$

**Lösung:**

$$\begin{array}{ll} C_8 = a \vee b & \text{(aus } C_1 \text{ und } C_3) \\ C_9 = \neg b & \text{(aus } C_4 \text{ und } C_5) \\ C_{10} = a & \text{(aus } C_8 \text{ und } C_9) \\ C_{11} = \neg a & \text{(aus } C_6 \text{ und } C_7) \\ C_{12} = \perp & \text{(aus } C_{10} \text{ und } C_{11}) \end{array}$$



## Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta} (\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} (\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} (\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge-R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee-R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} (\rightarrow-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow-R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} (\neg-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} (\neg-R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x:t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x:y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln  $(\forall-R)$  und  $(\exists-L)$  gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable  $y$  kommt in der Konklusion nicht vor.