

Musterlösung zur Klausur Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2024

4. Oktober 2024

Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an einen Prüfer.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
 - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
 - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
 - Getränke
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in DRUCKBUCHSTABEN aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	

Bitte *nur* ankreuzen, wenn die Klausur entwertet und nicht korrigiert werden soll. (Please check with an X *only* if the exam should be voided and not graded.)

Wird bei der Korrektur ausgefüllt:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	10	9	6	10	8	14	13	70
Erreicht								

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 70 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

Wichtige fachliche Hinweise:

- \mathbb{N} beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

V i e l E r f o l g !

Aufgabe 1 (Mengen und Relationen, 3 + 2 + 5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) $(\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \cap \{2, 3, 4, 5\}$

LÖSUNG: $(\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$ **1P**

ii) $\mathcal{P}(\{a\}) \times \{b\}$

LÖSUNG: $\mathcal{P}(\{a\}) \times \{b\} = \{\{\}, \{a\}\} \times \{b\} = \{(\{\}, b), (\{a\}, b)\}$ **1P**

iii) $\bigcup_{i=0}^4 \{i\}$

LÖSUNG: $\bigcup_{i=0}^4 \{i\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ **1P**

b) Geben Sie eine Relation $R \subseteq \{a, b, c\}^2$ an, die die folgenden Eigenschaften erfüllt. Geben Sie die Mengen der vollständigen Paare der Relation an.

Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) reflexiv, transitiv, symmetrisch

LÖSUNG: $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ **1P**

ii) totale Ordnung

LÖSUNG: $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (a, c)\}$ **1P**

c) Beweisen oder widerlegen Sie **beide** Richtungen der folgenden Aussage ohne Äquivalenzumformungen:

$$(A \cup B) \setminus (B \cup C) = A \setminus C$$

(Ein Venn-Diagramm reicht **nicht** als Beweis.)

LÖSUNG: (**1P** für Beweisstruktur (beide Richtungen), **2P** je Richtung)

• Beweis Richtung \subseteq :

Sei $a \in (A \cup B) \setminus (B \cup C)$. Dann ist a in $A \cup B$, aber **nicht** in $B \cup C$. Also ist a in A oder B aber nicht in B und C . Somit muss $a \in A$ gelten und auch $a \in A \setminus C$.

- Richtung \supseteq ist falsch. Gegenbeispiel:

Seien $A = B = \{0\}$ und $C = \{\}$. Dann sind

$$(A \cup B) \setminus (B \cup C) = \{0\} \setminus \{0\} = \{\},$$

$$A \setminus C = \{0\} \setminus \{\} = \{0\} \text{ und}$$

$$\{\} \not\subseteq \{0\}.$$

Aufgabe 2 (Induktion, 9 Punkte)

Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Markieren Sie die Anwendung der Induktionshypothese!

LÖSUNG:

Induktionsanfang (IA): Sei $n = 0$. Dann gilt $\sum_{i=0}^0 i^2 = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$.

Induktionshypothese (IH): $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Induktionsschritt (IS): $n \rightarrow n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(Anwendung IH)} \\ &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2(n+1)+1) \\ &= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

- **1P** für den Beweisaufbau (Induktionsanfang & -schritt), die Induktionshypothese muss nicht explizit genannt werden.
- **1P** für einen korrekten Induktionsanfang.
- **7P** für den Induktionsschritt:
 - **1P** für die richtige Anwendung der Induktionshypothese
 - **6P** für korrekte Herleitung \Rightarrow **-1P** je Fehler bzw. zu große Schritte.
 - Ein Schritt ist zu groß, wenn er ohne Zwischenschritte oder Begründung nicht direkt nachvollziehbar ist (im Ermessen des Korrektors).

Aufgabe 3 (Funktionen, 6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ und $g : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ die Funktionen:

$f(x) := 3 \cdot x$ und $g(x) := 2 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{Z}_7$.

\cdot ist hierbei die übliche Multiplikation auf \mathbb{Z}_7 (Multiplikation Modulo 7).

a) Geben Sie f , f^{-1} und $f \circ g$ als Mengen der vollständigen Paare der Funktionen an.

LÖSUNG:

- $f = \{(0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 2), (4, 5), (5, 1), (6, 4)\}$ **1P**
- $f^{-1} = \{(0, 0), (1, 5), (2, 3), (3, 1), (4, 6), (5, 4), (6, 2)\}$ **1P**
- $f \circ g = \{(0, 0), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ **1P**

b) Geben Sie, falls vorhanden, die Zyklen von g , g^{-1} und $g \circ f$ an.

LÖSUNG:

- $g : \{0\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 6, 5\}$ **1P**
- $g^{-1} : \{0\}, \{1, 4, 2\}, \{3, 5, 6\}$ **1P**
- $g \circ f : \{0\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ **1P**

(Die Reihenfolge der Elemente in einem Zyklus spielt natürlich keine Rolle.)

Aufgabe 4 (Algebraische Strukturen, 10 Punkte)

Beweisen Sie bei den folgenden algebraischen Strukturen, welche dieser Eingruppierungen zutrifft:

- Keine Halbgruppe
- Eine Halbgruppe, aber kein Monoid
- Ein Monoid, aber keine Gruppe
- Eine Gruppe, aber nicht abelsch
- Abelsche Gruppe

LÖSUNG: (1P: für allgemeinen richtigen Ansatz in der ganzen Aufgabe.)

a) $(\{n \in \mathbb{N}; n \text{ ist gerade}\}, +)$

LÖSUNG: Ein Monoid, aber keine Gruppe 1P:

- $+$ ist auf ganz \mathbb{N} assoziativ, also insbesondere auch auf den gerade Zahlen. 1P
- 0 ist das neutrale Element, da 0 gerade ist und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (insbesondere der geraden Zahlen), das $n + 0 = n$ und $0 + n = n$. 1P
- Es gibt nicht zu jedem Element ein inverses Element. (Nur die 0 hat ein inverses Element, nämlich sich selbst.)
Beispiel: $2 + x = 0 \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$ 1P

b) $(\{f; f : M \rightarrow M\}, \oplus)$ wobei (M, \diamond) eine abelsche Gruppe ist und $(f \oplus g)(x) := f(x) \diamond g(x)$ für alle $x \in M$.

Das heißt in (M, \diamond) existiert ein neutrales Element d und jedes Element x hat ein inverses Element x^{-1} .

LÖSUNG:

Die folgenden Beweise gelten für alle $x \in M$.

Abelsche Gruppe 1P:

- Assoziativität **1P**:

$$\begin{aligned}
 ((f \oplus g) \oplus h)(x) &= (f \oplus g)(x) \diamond h(x) \\
 &= (f(x) \diamond g(x)) \diamond h(x) \\
 &= f(x) \diamond (g(x) \diamond h(x)) && \text{da } \diamond \text{ auf } M \text{ assoziativ} \\
 &= f(x) \diamond (g \oplus h)(x) \\
 &= (f \oplus (g \oplus h))(x)
 \end{aligned}$$

- Neutrales Element **1P**: Sei d das neutrale Element von (M, \diamond) , dann ist $e : M \rightarrow M$ mit $e(x) = d$ das neutrale Element von $(\{f; f : M \rightarrow M\}, \oplus)$:

$$\begin{aligned}
 (f \oplus e)(x) &= f(x) \diamond e(x) \\
 &= f(x) \diamond d \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e \oplus f)(x) &= e(x) \diamond f(x) \\
 &= d \diamond f(x) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

- Inverses Element **1P**: $f^{-1}(x) := (f(x))^{-1}$

$$\begin{aligned}
 (f \oplus f^{-1})(x) &= e(x) \\
 \Leftrightarrow f(x) \diamond f^{-1}(x) &= d \\
 \Leftrightarrow f(x) \diamond f(x)^{-1} &= d
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \oplus f)(x) &= e(x) \\
 \Leftrightarrow f^{-1}(x) \diamond f(x) &= d \\
 \Leftrightarrow f(x)^{-1} \diamond f(x) &= d
 \end{aligned}$$

- Kommutativität **1P**:

$$\begin{aligned}
 (f \oplus g)(x) &= f(x) \diamond g(x) \\
 &= g(x) \diamond f(x) && \diamond \text{ ist kommutativ auf } (M, \diamond) \\
 &= (g \oplus f)(x)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Polynome, 4 + 4 Punkte)

- a) Das Polynom $p(x) := x^3 + 2x^2 + 3$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_5[x]$.
Berechnen Sie $(3x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 2)$ in $\mathbb{Z}_5[x]/p(x)$.

LÖSUNG:

$$(3x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 2) = 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 2 \quad \mathbf{1P}$$

$3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 2 \pmod{x^3 + 2x^2 + 3}$ kann tabellarisch berechnet werden:

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0			
3	3	2	1	2			
−	3	1	0	1	0	$= 3x \cdot (x^3 + 2x^2 + 3) \quad \mathbf{1P}$	
		2	2	0	2		
−		2	4	0	1	1	$= 2 \cdot (x^3 + 2x^2 + 3) \quad \mathbf{1P}$
		3	0	1			

$$\rightsquigarrow 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv 3x^2 + 1 \pmod{x^3 + 2x^2 + 3}$$

$$\rightsquigarrow (3x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 2) = 3x^2 + 1 \quad \mathbf{1P}$$

- b) Berechnen Sie mit dem Horner-Schema den Wert des Polynoms $p(x) := 2x^3 + x^2 + 3x + 2$ über \mathbb{Z}_7 an der Stelle 4.

LÖSUNG: (**1P**: richtige Struktur)

$$p := 2$$

$$i := 2$$

$$p := p \cdot b + a_2 = 2 \cdot 4 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \mathbf{(1P)}$$

$$i := 1$$

$$p := p \cdot b + a_1 = 2 \cdot 4 + 3 = 1 + 3 = 4 \quad \mathbf{(1P)}$$

$$i := 0$$

$$p := p \cdot b + a_0 = 4 \cdot 4 + 2 = 2 + 2 = 4 \quad \mathbf{(1P)}$$

Der Wert von $p(4)$ ist damit 4.

Aufgabe 6 (Aussagenlogik, 5 + 9 Punkte)

- a) Geben Sie eine Wahrheitstafel der folgenden Formel an und bestimmen Sie ob diese unerfüllbar, erfüllbar aber keine Tautologie oder eine Tautologie ist:

$$F := (x \leftrightarrow y) \rightarrow ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))$$

LÖSUNG: (4P für die Tabelle. -1P pro Fehler)

x	y	$x \leftrightarrow y$	$x \wedge y$	$\neg x \wedge \neg y$	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$	F
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1

F ist eine Tautologie (1P).

- b) Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$((x \rightarrow y) \rightarrow ((\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y))) \vee \neg z$$

LÖSUNG: Um zu zeigen dass die Formel tautologisch ist, zeigen wir, dass ihr Komplement unerfüllbar ist (1P). Hierfür bringen wir die Negation der Formel in KNF:

$$\begin{aligned} & \neg(((x \rightarrow y) \rightarrow ((\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y))) \vee \neg z) \\ \equiv & \neg((\neg(\neg x \vee y) \vee ((\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y))) \vee \neg z) \\ \equiv & \neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y) \vee \neg z) \\ \equiv & \neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(\neg x \wedge \neg y \wedge z) \wedge \neg(x \wedge y) \wedge \neg(\neg x \wedge y) \wedge z \\ \equiv & \underbrace{(\neg x \vee y)}_1 \wedge \underbrace{(x \vee y \vee \neg z)}_2 \wedge \underbrace{(\neg x \vee \neg y)}_3 \wedge \underbrace{(x \vee \neg y)}_4 \wedge \underbrace{z}_5 \end{aligned}$$

(4P für Umformungen; -1P pro Fehler)

Die resultierende Formel besteht aus 5 Klauseln auf die wir nun die Resolutionsregel anwenden:

6 $x \vee y$ aus (2,5)

7 $\neg y$ aus (3,4)

8 y aus (6,7)

9 \square aus (7,8)

(1P für jeden zielführenden Resolutionsschritt, insgesamt max. 4P. Ein „Beweisbaum“ wird auch akzeptiert.)

Aufgabe 7 (Prädikatenlogik, 4 + 9 Punkte)

a) $M = (\{a, e\}, \{\diamond\}, \{\dot{=}\})$ ist eine Sprache erster Stufe. Hierbei ist \diamond ein zweistelliges Funktionssymbol und $\dot{=}$ ein zweistelliges Prädikatensymbol (je in Infix-Notation). Folgende Formeln sind in der Sprache M definiert:

- $\neg(e \dot{=} a)$
- $\forall x \forall y \forall z (x \diamond (y \diamond z) \dot{=} (x \diamond y) \diamond z)$
- $\forall x (e \diamond x \dot{=} x)$
- $\forall x (x \diamond e \dot{=} x)$

Vervollständigen Sie die folgende Interpretation von M , sodass sie die definierten Formeln alle erfüllt:

LÖSUNG: Die Formeln beschreiben die Monoid-Axiome. Jeder Monoid mit mindestens 2 Elementen in der Grundmenge ist eine richtige Interpretation.

(4P für eine Interpretation, die die Formeln erfüllt. -1P pro Fehler bzw. nicht eindeutiger Notation.)

- Grundmenge $G =$

LÖSUNG: \mathbb{Z}_2

- Konstanten:

– $a \rightsquigarrow$

LÖSUNG: 1

– $e \rightsquigarrow$

LÖSUNG: 0

- Funktionssymbole: $\diamond \rightsquigarrow$

LÖSUNG: + mit der üblichen Bedeutung.
($0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 0$)

- Prädikatensymbole: $\dot{=} \rightsquigarrow \{(x, x); x \in G\}$

b) Leiten Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (siehe letzte Seite) her:

$$R(c) \Rightarrow (\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))) \rightarrow (\exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)))$$

(Permutationen müssen **nicht** angegeben werden.)

LÖSUNG:

- | | | | |
|---|---|---------------------|----------|
| 1 | $R(c), P(a) \Rightarrow P(a), Q(a)$ | (Axiom) | |
| 2 | $R(c), Q(a) \Rightarrow P(a), Q(a)$ | (Axiom) | |
| 3 | $R(c), \underline{P(a) \vee Q(a)} \Rightarrow P(a), Q(a)$ | (\vee -L) | aus 1, 2 |
| 4 | $R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow P(a), \underline{\exists x(Q(x))}$ | (\exists -R) | aus 3 |
| 5 | $R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \underline{\exists x(P(x))}, \exists x(Q(x))$ | (\exists -R) | aus 4 |
| 6 | $R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \underline{\exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))}$ | (\vee -R) | aus 5 |
| 7 | $R(c), \underline{\forall y(P(a) \vee Q(y))} \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))$ | (\forall -L) | aus 6 |
| 8 | $R(c), \underline{\exists x \forall y(P(x) \vee Q(y))} \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))$ | (\exists -L) | aus 7 |
| 9 | $R(c) \Rightarrow \underline{(\exists x \forall y(P(x) \vee Q(y)))} \rightarrow (\exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x)))$ | (\rightarrow -R) | aus 8 |

Die jeweiligen Änderungen in jeder Sequenz sind unterstrichen. Regeln mit Eigenvariablenbedingung sind **rot** markiert.

Baumdarstellung:

$$\begin{array}{c}
 \frac{R(c), P(a) \Rightarrow P(a), Q(a) \quad R(c), Q(a) \Rightarrow P(a), Q(a)}{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow P(a), Q(a)} (\vee\text{-L}) \\
 \frac{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow P(a), Q(a)}{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow P(a), \exists x(Q(x))} (\exists\text{-R}) \\
 \frac{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow P(a), \exists x(Q(x))}{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \exists x(P(x)), \exists x(Q(x))} (\exists\text{-R}) \\
 \frac{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \exists x(P(x)), \exists x(Q(x))}{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))} (\vee\text{-R}) \\
 \frac{R(c), P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))}{R(c), \forall y(P(a) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))} (\forall\text{-L}) \\
 \frac{R(c), \forall y(P(a) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))}{R(c), \exists x \forall y(P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))} (\exists\text{-L}) \\
 \frac{R(c), \exists x \forall y(P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))}{R(c) \Rightarrow (\exists x \forall y(P(x) \vee Q(y))) \rightarrow (\exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x)))} (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

(Bei vollständig korrekter Lösung: **9P**. Bei nicht ganz korrekter Lösung: **1P** für jeden richtigen Schritt (bis höchstens **8P**). Permutationen müssen nicht angegeben werden. Wenn die angewandten Regeln oder die Sequenzen auf die angewandt wird nicht genannt werden: **1P** Abzug bei ≤ 2 fehlenden Angaben, bei > 2 fehlenden Angaben **2P** Abzug.)

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta} (\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} (\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} (\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge-R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee-R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} (\rightarrow-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow-R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} (\neg-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} (\neg-R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x : t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x : y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x : y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x : t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln ($\forall-R$) und ($\exists-L$) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.