

Musterlösung zur Klausur Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2024

7. August 2024

Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an einen Prüfer.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
 - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
 - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
 - Getränke
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in Druckbuchstaben aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	

Bitte *nur* ankreuzen, wenn die Klausur entwertet und nicht korrigiert werden soll. (Please check with an X *only* if the exam should be voided and not graded.)

Wird bei der Korrektur ausgefüllt:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	10	9	12	9	7	10	13	70
Erreicht								

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 80 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

Wichtige fachliche Hinweise:

- \mathbb{N} beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

V i e l E r f o l g !

Aufgabe 1 (Mengen, 3 + 2 + 5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) $\{a, b, c\} \cap (\{a, d, d\} \cup \{c, e, f\})$

LÖSUNG: $\{a, b, c\} \cap (\{a, d, d\} \cup \{c, e, f\}) = \{a, b, c\} \cap \{a, c, d, e, f\} = \{a, c\}$ **1P**

ii) $\{1, 2\} \times \{\{\}, \{1, 2\}\}$

LÖSUNG: $\{(1, \{\}), (1, \{1, 2\}), (2, \{\}), (2, \{1, 2\}), \}$ **1P**

iii) $\mathcal{P}(\{4, 5\})$

LÖSUNG: $\{\{\}, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}$ **1P**

b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) $|\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4\})|$

LÖSUNG: $|\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4\})| = 2^{|\{0, 1, 2, 3, 4\}|} = 2^5 = 32$ **1P**

ii) $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x + y = 4\}|$

LÖSUNG: $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x + y = 4\}| = |\{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}| = 5$ **1P**

c) Beweisen oder widerlegen Sie **beide** Richtungen der folgenden Aussage ohne Äquivalenzumformungen:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(Ein Venn-Diagramm reicht **nicht** als Beweis.)

LÖSUNG: (**1P** für Beweisstruktur (beide Richtungen), **2P** je Richtung)

- Beweis Richtung \subseteq :

Sei $a \in A \setminus (B \cup C)$. Dann ist a in A , aber **nicht** in $B \cup C$. Somit ist a nicht in B (und nicht in C). Also ist a in $A \setminus B$ und damit auch in $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

- Richtung \supseteq ist falsch. Gegenbeispiel:

Seien $A = B = \{0\}$ und $C = \{\}$. Dann sind

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (\{0\} \setminus \{0\}) \cup (\{0\} \setminus \{\}) = \{\} \cup \{0\} = \{0\},$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{0\} \setminus (\{0\} \cup \{\}) = \{0\} \setminus \{0\} = \{\} \text{ und}$$

$$\{\} \not\supseteq \{0\}.$$

Aufgabe 2 (Induktion, 9 Punkte)

Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(n^3 + 2n) \bmod 3 = 0$$

LÖSUNG:

Induktionsanfang (IA): Sei $n = 0$. Dann gilt $(0^3 + 2 \cdot 0) \bmod 3 = 0 \bmod 3 = 0$.

Induktionshypothese (IH): $(n^3 + 2n) \bmod 3 = 0$

Induktionsschritt (IS): $n \rightarrow n + 1$.

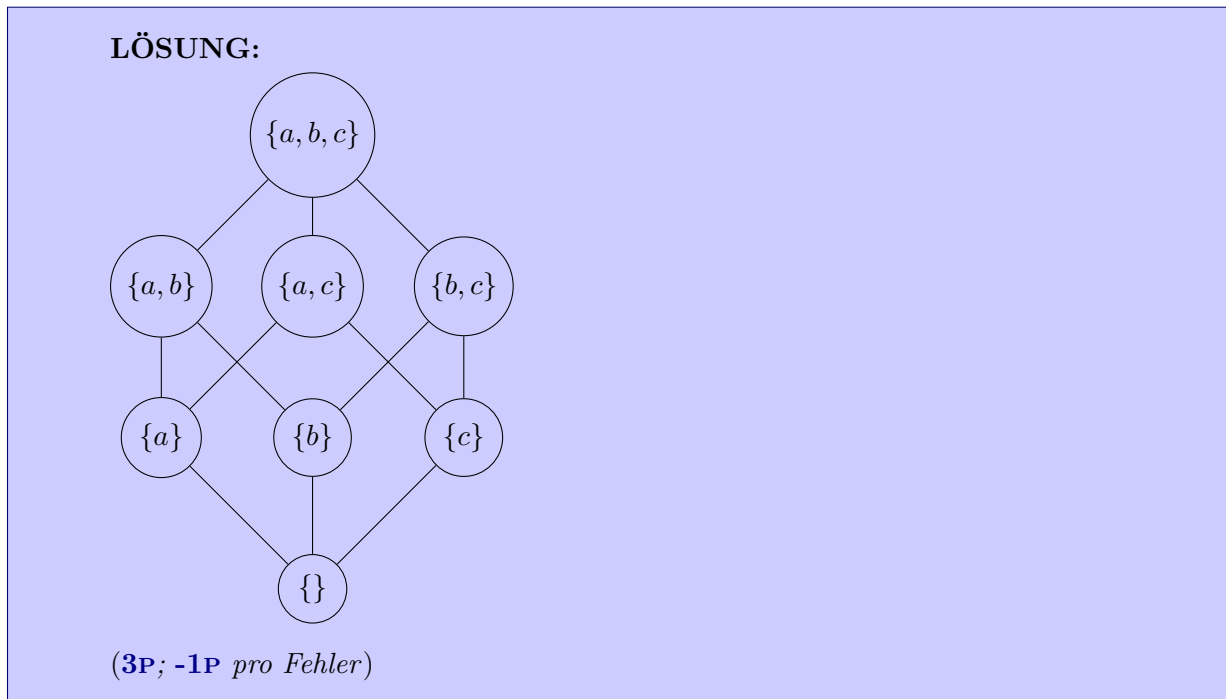
$$\begin{aligned} ((n+1)^3 + 2(n+1)) \bmod 3 &= ((n+1)(n+1)(n+1) + 2(n+1)) \bmod 3 \\ &= ((n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n+1)) \bmod 3 \\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2) \bmod 3 \\ &= ((n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3)) \bmod 3 \\ &= (n^3 + 2n) \bmod 3 + (3n^2 + 3n + 3) \bmod 3 \\ &= 0 + (3n^2 + 3n + 3) \bmod 3 && \text{(IH)} \\ &= 3n^2 \bmod 3 + 3n \bmod 3 + 3 \bmod 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **1P** für den Beweisaufbau (Induktionsanfang & -schritt), die Induktionshypothese muss nicht explizit genannt werden. **1P** für einen korrekten Induktionsanfang.
- **7P** für den Induktionsschritt:
 - **1P** für die richtige Anwendung der Induktionshypothese
 - **6P** für korrekte Herleitung \Rightarrow **-1P** je Fehler bzw. zu große Schritte.
 - Ein Schritt ist zu groß, wenn er ohne Zwischenschritte oder Begründung nicht direkt nachvollziehbar ist (im Ermessen des Korrektors).

Aufgabe 3 (Verbände und Relationen, 3 + 3 + 6 Punkte)

Wir betrachten den Potenzmengenverband über eine beliebige Menge M , welcher gebildet wird durch $\mathcal{P}(M)$ mit der Relation \subseteq .

- a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für den Potenzmengenverband mit $M = \{a, b, c\}$.



- b) Berechnen Sie im Potenzmengenverband mit $M = \mathbb{N}$

- i) das kleinste und größte Element.

LÖSUNG: $\{\}$ und \mathbb{N} . **1P**

- ii) das Supremum von $\{1, 2, 3\}$ und $\{11, 12\}$.

LÖSUNG: $\{1, 2, 3\} \cup \{11, 12\} = \{1, 2, 3, 11, 12\}$ **1P**

- iii) das Infimum von $\{n; 2 \mid n\}$ und $\{n; 3 \mid n\}$.

LÖSUNG: $\{n; 2 \mid n\} \cap \{n; 3 \mid n\} = \{n; \text{kgV}(2, 3) \mid n\} = \{n; 6 \mid n\}$ **1P**

- c) Wir betrachten nur noch endliche M . Sind die folgenden Relationen partielle Ordnungen? Bildet $\mathcal{P}(M)$ mit den folgenden Relationen einen Verband?

i) $R_1 = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M); |X| \text{ ist ein Teiler von } |Y|\}$

LÖSUNG: Nein, da R_1 keine partielle Ordnung ist. R_1 ist keine partielle Ordnung, da nicht antisymmetrisch. Gegenbeispiel mit $M = \{0, 1\}$: Es gilt $\{0\} R_1 \{1\}$ und $\{1\} R_1 \{0\}$, aber $\{0\} \neq \{1\}$.

2P

ii) $R_2 = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M); X \subseteq Y \text{ und } |X| \bmod 2 = |Y| \bmod 2\}$

LÖSUNG: Nein. R_2 ist zwar eine partielle Ordnung:

- R_2 ist reflexiv: $X \subseteq X$ und $|X| \bmod 2 = |X| \bmod 2$. **1P**
- R_2 ist transitiv: \subseteq ist transitiv und $=$ ist transitiv. **1P**
- R_2 ist antisymmetrisch: Wenn $X R_2 Y$ und $Y R_2 X$, dann muss gelten $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$. Also gilt $X = Y$. **1P**

Aber nicht alle Elemente haben eine Infimum bzw. Supremum. Wenn z.B. $M = \{0\}$ ist existiert $\emptyset \sqcap \{0\}$ nicht. **1P**

Aufgabe 4 (Algebraische Strukturen, 9 Punkte)

Beweisen Sie bei den folgenden algebraischen Strukturen, welche dieser Eingruppierungen zutrifft:

- Keine Halbgruppe
- Eine Halbgruppe, aber kein Monoid
- Ein Monoid, aber keine Gruppe
- Eine Gruppe, aber nicht abelsch
- Abelsche Gruppe

i) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$

LÖSUNG:

Ein Monoid, aber keine Gruppe **1P**:

- \cup ist assoziativ. **1P**
- \emptyset ist das neutrale Element, da für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \cup \emptyset = A$ und $\emptyset \cup A = A$. **1P**
- Es gibt nicht zu jedem Element ein inverses Element. Es gibt nämlich für $A \neq \emptyset$ keine Menge B , sodass $A \cup B = \emptyset$. **1P**

ii) (\mathbb{Z}, \circ_k) mit $k \in \mathbb{Z}$ und $a \circ_k b := a + b + k$

LÖSUNG:

Abelsche Gruppe **1P**:

- Assoziativität: $(a \circ_k b) \circ_k c = (a + b + k) + c + k = a + (b + c + k) + k = a + (b \circ_k c) + k = a \circ_k (b \circ_k c)$. Hierbei haben wir die Kommutativität und Assoziativität von $+$ benutzt. **1P**
- $-k$ ist das neutrale Element: $a \circ_k -k = a + (-k) + k = a$ und $-k \circ_k a = -k + a + k = a$. **1P**
- Es gibt inverse Elemente:

$$\begin{aligned} a \circ_k a^{-1} = -k &\Leftrightarrow a + a^{-1} + k = -k \\ &\Leftrightarrow a + a^{-1} = -2k \\ &\Leftrightarrow a^{-1} = -2k - a \end{aligned}$$

1P

- Kommutativität: $a \circ_k b = a + b + k = b + a + k = b \circ_k a$ **1P**

Aufgabe 5 (Polynome, 7 Punkte)

Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome $4x^5 + 6x^4 + 6x^2 + 4x$ und $6x^3 + 3x^2 + 1$ über dem Körper \mathbb{Z}_7 .

LÖSUNG: (**1P**: Iterationen des euklidischen Algorithmus erkennbar)

- $4x^5 + 6x^4 + 6x^2 + 4x \bmod 6x^3 + 3x^2 + 1$:

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
4	6	0	6	4	0	
–	4	2	0	3		$= 3x^2 \cdot (6x^3 + 3x^2 + 1)$ (1P)
	4	0	3	4	0	
–	4	2	0	3		$= 3x \cdot (6x^3 + 3x^2 + 1)$ (1P)
		5	3	1	0	
–		5	6	0	2	$= 2 \cdot (6x^3 + 3x^2 + 1)$ (1P)
			4	1	5	

- $6x^3 + 3x^2 + 1 \bmod 4x^2 + x + 5$:

x^3	x^2	x^1	x^0	
6	3	0	1	
–	6	5	4	$= 5x(4x^2 + x + 5)$ (1P)
		5	3	
–		5	3	$= 3(4x^2 + x + 5)$ (1P)
			0	

Damit ist $4x^2 + x + 5$ ein ggT (**1P**) und ebenso ist jedes Vielfache in $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$.

(Also auch $x^2 + 2x + 3$, $5x^2 + 3x + 1$, $2x^2 + 4x + 6$, $6x^2 + 5x + 4$, $3x^2 + 6x + 2$.)

Aufgabe 6 (Aussagenlogik, 4 + 6 Punkte)

- a) Geben Sie eine Wahrheitstafel der folgenden Formel an und bestimmen Sie ob diese erfüllbar, unerfüllbar und/oder eine Tautologie ist:

$$F := x_0 \rightarrow (x_1 \vee (x_1 \leftrightarrow x_0))$$

LÖSUNG: (3P für die Tabelle. -1P pro Fehler)

x_0	x_1	$x_1 \leftrightarrow x_0$	$x_1 \vee (x_1 \leftrightarrow x_0)$	F
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

F ist also erfüllbar, somit nicht unerfüllbar und auch keine Tautologie (1P).

- b) Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$\neg(x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg(x_0 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \vee \neg x_0 \vee x_2$$

LÖSUNG: Um zu zeigen dass die Formel tautologisch ist, zeigen wir, dass ihr Komplement unerfüllbar ist (1P). Hierfür bringen wir die Negation der Formel in KNF:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg(x_0 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \vee \neg x_0 \vee x_2) \\ \equiv & (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_0 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \wedge x_0 \wedge \neg x_2 & (1P) \\ \equiv & \underbrace{(\neg x_1 \vee x_2)}_1 \wedge \underbrace{(\neg x_0 \vee x_1 \vee x_2)}_2 \wedge \underbrace{x_0}_3 \wedge \underbrace{\neg x_2}_4 & (1P) \end{aligned}$$

Die resultierende Formel besteht aus 4 Klauseln auf die wir nun die Resolutionsregel anwenden:

$$5 \quad x_1 \vee x_2 \text{ aus } (2,3)$$

$$6 \quad x_2 \text{ aus } (1,5)$$

$$7 \quad \square \text{ aus } (4,6)$$

(1P für jeden zielführenden Resolutionsschritt, insgesamt max. 3P. Ein „Beweisbaum“ wird auch akzeptiert.)

Aufgabe 7 (Prädikatenlogik, 4 + 9 Punkte)

a) Bringen Sie die folgende Formel in Pränex-Normalform:

$$\exists x(P(x)) \rightarrow (\neg \forall y(Q(y, y)) \rightarrow Q(f(x), x))$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x)) \rightarrow (\neg \forall y(Q(y, y)) \rightarrow Q(f(x), x)) \\ \equiv & \neg \exists x(P(x)) \vee \forall y(Q(y, y)) \vee Q(f(x), x) && \text{(Implikation auflösen) (1P)} \\ \equiv & \forall x(\neg P(x)) \vee \forall y(Q(y, y)) \vee Q(f(x), x) && (\neg \text{reinziehen) (1P)} \\ \equiv & \forall z(\neg P(z)) \vee \forall y(Q(y, y)) \vee Q(f(x), x) && \text{(Umbenennen) (1P)} \\ \equiv & \forall z \forall y(\neg P(z) \vee Q(y, y) \vee Q(f(x), x)) && \text{(1P)} \end{aligned}$$

(für andere Lösung: **4P** für korrekte Lösung, **-1P** für jeden Fehler)

b) Leiten Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (siehe letzte Seite) her:

$$\exists x \forall y(P(x) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall y \exists x(Q(y) \vee \neg P(x))$$

(Permutationen müssen **nicht** angegeben werden.)

LÖSUNG:

1	$P(a) \Rightarrow Q(b), P(a)$	(Axiom)	
2	$P(a), Q(b) \Rightarrow Q(b)$	(Axiom)	
3	$P(a), \underline{P(a) \rightarrow Q(b)} \Rightarrow Q(b)$	(\rightarrow -L)	aus 1, 2
4	$P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow Q(b), \underline{\neg P(a)}$	(\neg -R)	aus 3
5	$P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow \underline{Q(b) \vee \neg P(a)}$	(\vee -R)	aus 4
6	$P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow \underline{\exists x(Q(b) \vee \neg P(x))}$	(\exists -R)	aus 5
7	$\underline{\forall y(P(a) \rightarrow Q(y))} \Rightarrow \exists x(Q(b) \vee \neg P(x))$	(\forall -L)	aus 6
8	$\forall y(P(a) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \underline{\forall y \exists x(Q(y) \vee \neg P(x))}$	(\forall -R)	aus 7
9	$\underline{\exists x \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))} \Rightarrow \forall y \exists x(Q(y) \vee \neg P(x))$	(\exists -L)	aus 8

Die jeweiligen Änderungen in jeder Sequenz sind unterstrichen. Regeln mit Eigenvariablenbedingung sind **rot** markiert.

Baumdarstellung:

$$\frac{\frac{\frac{P(a) \Rightarrow Q(b), P(a) \quad P(a), Q(b) \Rightarrow Q(b)}{P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow Q(b), \neg P(a)} (\rightarrow\text{-L})}{P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow Q(b), \neg P(a)} (\neg\text{-R})}{P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow Q(b) \vee \neg P(a)} (\vee\text{-R})}{P(a) \rightarrow Q(b) \Rightarrow \exists x(Q(b) \vee \neg P(x))} (\exists\text{-R})}{\forall y(P(a) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \exists x(Q(b) \vee \neg P(x))} (\forall\text{-L})}{\forall y(P(a) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall y \exists x(Q(y) \vee \neg P(x))} (\forall\text{-R})}{\exists x \forall y(P(x) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall y \exists x(Q(y) \vee \neg P(x))} (\exists\text{-L})$$

(Bei vollständig korrekter Lösung: **9P**. Bei nicht ganz korrekter Lösung: **1P** für jeden richtigen Schritt (bis höchstens **8P**). Permutationen müssen nicht angegeben werden. Wenn die angewandten Regeln oder die Sequenzen auf die angewandt wird nicht genannt werden: **1P** Abzug bei ≤ 2 fehlenden Angaben, bei > 2 fehlenden Angaben **2P** Abzug.)

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta} (\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} (\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} (\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge-R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee-R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} (\rightarrow-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow-R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} (\neg-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} (\neg-R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x:t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x:y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln ($\forall-R$) und ($\exists-L$) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.