

Musterlösung für die Wiederholungsklausur zur Vorlesung Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2026

22.09.2026

Hinweise zur Vorbereitung

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an die Aufsicht.
- Schalten Sie Ihre elektronischen Geräte (u.a. Mobiltelefone, Tablets, Smartwatches) aus.
- Auf Ihrem Tisch dürfen Sie nur Stifte, Ihren Studentenausweis sowie Lebensmittel haben.
- Geben Sie alle anderen Gegenstände – insbesondere Rucksäcke und Jacken – bei der Aufsicht ab.
- Nutzen Sie keine Rot-, Grün- oder Bleistifte.
- Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.
- Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Vorname (in GROSSBUCHSTABEN)	
Nachname (in GROSSBUCHSTABEN)	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Unterschrift	

Rücktritt Sie haben die Möglichkeit, notenschädlich von der Klausur zurückzutreten. Falls Sie dies möchten, kreuzen Sie folgendes Kästchen an:

☐ Ich trete von der Prüfung zurück. Meine Klausur soll mit der Note 5,0 bewertet werden.

Die erreichten Punkte bitte nicht ausfüllen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	20	15	10	10	10	20	15	100
Erreicht								

Hinweise zur Klausur

- Die Klausur besteht aus sieben Aufgaben. Insgesamt können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Mit 50 Punkten haben Sie sicher bestanden.
- Sie haben für die Bearbeitung 120 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein selbst mitgebrachtes Papier. Sollte der vorgesehene Platz nicht für Ihre Lösung ausreichen, verwenden Sie die Rückseiten. Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Blätter.
- Falls Sie eine Aufgabe nicht unmittelbar unter der Aufgabenstellung lösen, machen Sie klar kenntlich, wo die Lösungen zu finden sind.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an die Aufsicht.
- Das Symbol $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen inklusive der Zahl 0.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Grundlagen

- (a) 4 Punkte Sei $A = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Geben Sie eine Relation $R \subseteq A^2$ an, die reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv ist. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$$

Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich. Gegenbeispiel zur Transitivität: $a R b$ und $b R c$, aber nicht $a R c$.

(1P für Reflexivität. 1P für Symmetrie. 2P für Nichttransitivität.)

- (b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. 1 Punkt $|\{1, 2\} \times \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}|$

Musterlösung:

12

(1P für eine korrekte Lösung.)

ii. 1 Punkt $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{1, 2, 3\}|$

Musterlösung:

8

(1P für eine korrekte Lösung.)

iii. 1 Punkt $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\{1, 2, 3\}\}|$

Musterlösung:

7

(1P für eine korrekte Lösung.)

iv. 1 Punkt $|\{1, 2, 3, 3\}^3|$

Musterlösung:

27

(1P für eine korrekte Lösung.)

v. 1 Punkt $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq 1 \text{ und } y \leq 3\}|$

Musterlösung:

8

(1P für eine korrekte Lösung.)

vi. 1 Punkt $|\{\{\{\{1, 2\}\}\}\}|$

Musterlösung:

1

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

- (c) In der regulären Klausur wurde das Lemma $2n + 1 < 2^{n+1}$, wo $n \in \mathbb{N}$, ohne Beweis angenommen. Jetzt besteht Ihre Aufgabe darin, diese Lücke zu schließen. Beweisen Sie das Lemma durch vollständige Induktion über n .

- i. 1 Punkt Aussage des Induktionsanfangs:

Musterlösung:

$$2 \cdot 0 + 1 < 2^{0+1}.$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

- ii. 2 Punkte Beweis des Induktionsanfangs:

Musterlösung:

$$2 \cdot 0 + 1 = 1 < 2 = 2^{0+1}.$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- iii. 1 Punkt Induktionshypothese:

Musterlösung:

$$2n + 1 < 2^{n+1}.$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

- iv. 1 Punkt Aussage des Induktionsschritts:

Musterlösung:

$$2(n + 1) + 1 < 2^{n+2}.$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

- v. 5 Punkte Beweis des Induktionsschritts:

(Markieren Sie eindeutig jede Anwendung der Induktionshypothese.)

Musterlösung:

$$\begin{aligned} & 2(n + 1) + 1 \\ &= 2n + 1 + 2 \\ &< 2^{n+1} + 2 && \text{(durch die Induktionshypothese)} \\ &\leq 2^{n+1} + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

(**1P** für den ersten Schritt. **1P** für die Nutzung der Induktionshypothese. **1P** für den dritten Schritt. **1P** für den vierten Schritt. **1P** für die Markierung der Induktionshypothese.)

Aufgabe 2 Ordnungen und Verbände

- (a) Sei $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine sechselementige Menge. Sei $\preceq$ die kleinste partielle Ordnung auf A , sodass gilt: $a \preceq b$, $a \preceq c$, $b \preceq d$, $b \preceq e$, $c \preceq d$, $c \preceq e$, $d \preceq f$ und $e \preceq f$. Für die vier Teilaufgaben unten ist keine Begründung erforderlich.

- i. 3 Punkte Geben Sie die Menge der oberen Schranken von b und c an.

Musterlösung:

$\{d, e, f\}$

(**3P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**. **−1P** für falsche Mengennotation.)

- ii. 2 Punkte Geben Sie die Menge der unteren Schranken von b und b (d.h. zweimal b) an.

Musterlösung:

$\{a, b\}$

(**2P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**. **−1P** für falsche Mengennotation.)

- iii. 2 Punkte Geben Sie die Menge der Infima von b und c an.

Musterlösung:

$\{a\}$

(**2P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**. **−1P** für falsche Mengennotation.)

- iv. 2 Punkte Geben Sie die Menge der Suprema von b und c an.

Musterlösung:

$\emptyset$

(**2P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**. **−1P** für falsche Mengennotation.)

- (b) Gegeben sei die Struktur $(\mathbb{N}, \leq)$, wobei $\leq$ die übliche lineare Ordnung auf den natürlichen Zahlen kennzeichnet. Für die vier Teilaufgaben unten ist keine Begründung erforderlich.

- i. 1 Punkt Besitzt $(\mathbb{N}, \leq)$ ein Minimum? Wenn ja, welches Element?

Musterlösung:

Ja, 0 ist ein Minimum.

(1P für eine korrekte Lösung.)

- ii. 1 Punkt Besitzt $(\mathbb{N}, \leq)$ ein Maximum? Wenn ja, welches Element?

Musterlösung:

Nein, es gibt kein Maximum.

(1P für eine korrekte Lösung.)

- iii. 2 Punkte Geben Sie einen einfachen mathematischen Ausdruck für das Infimum bezüglich $(\mathbb{N}, \leq)$ von zwei Elementen $a, b \in \mathbb{N}$ an.

Musterlösung:

$\min \{a, b\}$

(2P für eine korrekte Lösung.)

- iv. 2 Punkte Geben Sie einen einfachen mathematischen Ausdruck für das Supremum bezüglich $(\mathbb{N}, \leq)$ von zwei Elementen $a, b \in \mathbb{N}$ an.

Musterlösung:

$\max \{a, b\}$

(2P für eine korrekte Lösung.)

Aufgabe 3 Zahlentheorie und Arithmetik

- (a) 4 Punkte Beweisen Sie die folgende Aussage oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel:

Sei $c \in \mathbb{Z}_{10} \setminus \{0\}$. Falls $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{10}$, dann $a \equiv b \pmod{10}$.

Musterlösung:

Gegenbeispiel: $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$

(**1P** für Gegenbeispiel (und nicht Beweis). **3P** für richtiges Gegenbeispiel.)

- (b) 6 Punkte Berechnen Sie $3^{34} \pmod{5}$. Erläutern Sie Ihre Berechnung.

Musterlösung:

Ergebnis: 4

Rechenweg:

Setze $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = 5$.

Dann berechne die α -Folge:

$$\alpha_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \alpha_0^2 \pmod{5} = 3^2 \pmod{5} = 4$$

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 \pmod{5} = 4^2 \pmod{5} = 1$$

$$\alpha_3 = \alpha_2^2 \pmod{5} = 1^2 \pmod{5} = 1$$

$$\alpha_4 = \alpha_3^2 \pmod{5} = 1^2 \pmod{5} = 1$$

$$\alpha_5 = \alpha_4^2 \pmod{5} = 1^2 \pmod{5} = 1$$

Berechne das Ergebnis: $(\alpha_1 \cdot \alpha_5) \pmod{5} = (4 \cdot 1) \pmod{5} = 4$.

(**2P** für ein richtiges Ergebnis. **1P** für die Definition der β 's. **2P** für die Berechnung der α 's. **1P** für die Berechnung des Ergebnis.)

Aufgabe 4 Algebra

Sei $\ominus : \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ eine Operation mit folgender Definition für alle $w, x, y, z \in \mathbb{N}$:

$$(w, x) \ominus (y, z) = (w + z, x + y)$$

- (a) 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\ominus$ kommutativ ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „kommutativ“ oder „Kommutativität“ zu nutzen.

Musterlösung:

$$(w, x) \ominus (y, z) = (y, z) \ominus (w, x) \text{ für alle } w, x, y, z \in \mathbb{N}.$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

- (b) 1 Punkt Beweisen Sie, dass $\ominus$ kommutativ ist, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Musterlösung:

Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} (0, 0) \ominus (1, 0) \\ &= (0, 1) \\ &\neq (1, 0) \\ &= (1, 0) \ominus (0, 0) \end{aligned}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

- (c) 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\ominus$ assoziativ ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „assoziativ“ oder „Assoziativität“ zu nutzen.

Musterlösung:

$$(u, v) \ominus ((w, x) \ominus (y, z)) = ((u, v) \ominus (w, x)) \ominus (y, z) \text{ für alle } u, v, w, x, y, z \in \mathbb{N}.$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

- (d) 1 Punkt Beweisen Sie, dass $\ominus$ assoziativ ist, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Musterlösung:

Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} (0, 0) \ominus ((1, 0) \ominus (1, 0)) \\ &= (0, 0) \ominus (1, 1) \\ &= (1, 1) \\ &\neq (0, 2) \\ &= (0, 1) \ominus (1, 0) \\ &= ((0, 0) \ominus (1, 0)) \ominus (1, 0) \end{aligned}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

Zur Erinnerung: $(w, x) \ominus (y, z) = (w + z, x + y)$ für alle $w, x, y, z \in \mathbb{N}$.

- (e) 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\ominus$ ein rechtsneutrales Element besitzt, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „rechtsneutral“ zu nutzen.

Musterlösung:

Es gibt ein Element $e \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt: $x \ominus e = x$.

(1P für korrekte Lösung inklusive $\exists$ -Quantor.)

- (f) 2 Punkte Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\ominus$ ein rechtsneutrales Element besitzt.

Musterlösung:

Die Operation hat $(0, 0)$ als rechtsneutrales Element:

$$(w, x) \ominus (0, 0) = (w + 0, x + 0) = (w, x)$$

(1P für Element. 1P für Beweis.)

- (g) 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\ominus$ ein linksneutrales Element besitzt, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „linksneutral“ zu nutzen.

Musterlösung:

Es gibt ein Element $e \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $e \ominus x = x$.

(1P für korrekte Lösung inklusive $\exists$ -Quantor.)

- (h) 2 Punkte Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\ominus$ ein linksneutrales Element besitzt.

Musterlösung:

Die Operation besitzt kein linksneutrales Element. Nehmen wir an, dass es eins existiert, und zwar (a, b) . Dann

$$(a, b) \ominus (1, 0) = (a + 0, b + 1) \neq (1, 0)$$

(1P für Gegenbeispiel (und nicht Beweis). 1P für richtiges Gegenbeispiel.)

Aufgabe 5 Kombinatorik

- (a) 1 Punkt Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Teilmengen besitzt $\{1, \dots, n\}$? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$2^n$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

- (b) 3 Punkte Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Teilmengen der Kardinalität 2 besitzt $\{1, \dots, n\}$? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$\binom{n}{2}$$

(**3P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

Alternative Lösungen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$(n-1)n/2$$

(**3P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

- (c) 3 Punkte Wie viele Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt es mit m Vorkommen von 0 und n Vorkommen von 1? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$\binom{m+n}{m}$$

(**3P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

- (d) 3 Punkte Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und sei C ein Stapel von n verschiedenen Spielkarten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, m Karten aus C geordnet auszuwählen, ohne Zurücklegen? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$\frac{n!}{(n-m)!} \quad (\text{d.h. } n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1))$$

(**3P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

Aufgabe 6 Aussagenlogik

- (a)
- 5 Punkte**
- Füllen Sie die Wahrheitstabelle der folgenden Formel
- F
- aus:

$$F = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$$

Sie dürfen die leere Spalte für Zwischenschritte nutzen. Diese werden allerdings nicht bewertet.

a	b	c		F
0	0	0		1
0	0	1		0
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

Musterlösung:

Siehe die Einträge in der letzten Spalte oben.

(−1P pro falsche Zeile.)

- (b)
- 5 Punkte**
- Schreiben Sie eine Formel
- G
- in disjunktiver Normalform, welche folgende Wahrheitstabelle hat. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

x	y	z	G
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Musterlösung:

$$G = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

(1P pro Term.)

Alternative Lösung:

$$G = \neg x \vee (y \wedge z)$$

(4P für den ersten Term. 1P für den zweiten Term.)

- (c) 10 Punkte Betrachtet wird ein Resolutionskalkül für die Aussagenlogik, welcher Klauseln als Mengen von Literalen auffasst und aus folgender Regel besteht:

$$\frac{C \vee a \quad D \vee \bar{a}}{C \vee D}$$

Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel in konjunktiver Normalform unerfüllbar ist, wobei $a, \dots, f$ Variablen und $C_1, \dots, C_7$ Klauselnamen sind:

$$\underbrace{(a \vee \neg c \vee d \vee \neg e \vee f)}_{C_1} \wedge \underbrace{(a \vee c)}_{C_2} \wedge \underbrace{(a \vee b \vee \neg b \vee c \vee d \vee e)}_{C_3} \wedge \underbrace{(a \vee d \vee \neg f)}_{C_4} \wedge \underbrace{\neg a}_{C_5} \wedge \underbrace{\neg d}_{C_6} \wedge \underbrace{e}_{C_7}$$

Geben Sie für jeden Schritt an, welche zwei Klauseln resolviert werden und was die Resolvente ist.

Musterlösung:

$$\begin{array}{ll} C_8 = a \vee \neg c \vee d \vee \neg e & (\text{aus } C_1 \text{ und } C_4) \\ C_9 = a \vee \neg c \vee \neg e & (\text{aus } C_8 \text{ und } C_6) \\ C_{10} = a \vee \neg e & (\text{aus } C_2 \text{ und } C_9) \\ C_{11} = \neg e & (\text{aus } C_{10} \text{ und } C_5) \\ C_{12} = \perp & (\text{aus } C_7 \text{ und } C_{11}) \end{array}$$

(Für jede Inferenz: **1P** für die Resolvente; falls die Resolvente stimmt, **1P** für die zwei Klauseln. Für die letzte Inferenz: die Resolvente muss $\perp$ sein.)

Aufgabe 7 Prädikatenlogik erster Stufe

- (a) Wir betrachten die Welt und ihre Vögel. Folgende Konstante und Prädikate stehen zur Verfügung:

m : Matilda McDuck
 $S(x, y)$: Vogel x ist mit Vogel y in die Schule gegangen
 $D(x)$: Vogel x ist eine Ente
 $Q(x, y)$: Vogel x quakt besser als Vogel y
 $P(x)$: Vogel x mag Erdnüsse
 $x \approx y$: Vogel x und y sind derselbe Vogel

Beschreiben Sie die folgenden Zusammenhänge mit prädikatenlogischen Formeln. Geben Sie alle Quantoren an.

- i. 2 Punkte „Nicht alle Vögel sind Enten.“

Musterlösung:

$$\neg \forall x D(x)$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- ii. 2 Punkte „Alle Enten mögen Erdnüsse und keine anderen Vögel mögen Erdnüsse.“

Musterlösung:

$$(\forall x (D(x) \rightarrow P(x))) \wedge \neg \exists x (\neg D(x) \wedge P(x))$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- iii. 2 Punkte „Mindestens zwei Vögel mögen Erdnüsse.“

Musterlösung:

$$\exists x, y (\neg(x \approx y) \wedge P(x) \wedge P(y))$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- iv. 2 Punkte „Matilda McDuck ist mit genau einem Vogel in die Schule gegangen.“

Musterlösung:

$$\exists x (S(m, x) \wedge \forall y (S(m, y) \rightarrow x \approx y))$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- v. 2 Punkte „Keine Ente quakt besser als Matilda McDuck.“

Musterlösung:

$$\neg \exists x (D(x) \wedge Q(x, m))$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- (b) 5 Punkte Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ eine Sprache erster Stufe mit $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ und $\mathcal{P} = \{P\}$, wobei $k(P) = 1$. Leiten Sie die folgende Formel mit Hilfe des Sequenzenkalküls her:

$$(\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$$

Kennzeichnen Sie alle angewendeten Regeln. Permutationen müssen nicht angegeben werden.

Siehe das letzte Blatt für die Regeln.

Musterlösung:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{P(c) \vdash P(c)}}{\vdash P(c), \neg P(c)} (\neg\text{-R})}{\vdash P(c), \exists x \neg P(x)} (\exists\text{-R})}{\vdash \exists x P(x), \exists x \neg P(x)} (\exists\text{-R})}{\vdash (\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))} (\vee\text{-R})$$

(1P pro richtige Zeile samt richtig gekennzeichneteter Regel. Lineare Beweise werden auch akzeptiert.)

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}(\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}(\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}(\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}(\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}(\wedge\text{-R})$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}(\vee\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee\text{-R})$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}(\rightarrow\text{-L}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}(\rightarrow\text{-R})$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}(\neg\text{-L}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}(\neg\text{-R})$$

$\forall$ -Quantor:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}(\forall\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}(\forall\text{-R})$$

$\exists$ -Quantor:

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}(\exists\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}(\exists\text{-R})$$

Bei den Regeln ($\forall$ -R) und ($\exists$ -L) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: Die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.