

Reguläre Klausur zur Vorlesung Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2026

22.07.2026

Hinweise zur Vorbereitung

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an die Aufsicht.
- Schalten Sie Ihre elektronischen Geräte (u.a. Mobiltelefone, Tablets, Smartwatches) aus.
- Auf Ihrem Tisch dürfen Sie nur Stifte, Ihren Studentenausweis sowie Lebensmittel haben.
- Geben Sie alle anderen Gegenstände – insbesondere Rucksäcke und Jacken – bei der Aufsicht ab.
- Nutzen Sie keine Rot-, Grün- oder Bleistifte.
- Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.
- Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Vorname (in GROSSBUCHSTABEN)	
Nachname (in GROSSBUCHSTABEN)	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Unterschrift	

Rücktritt Sie haben die Möglichkeit, notenschädlich von der Klausur zurückzutreten. Falls Sie dies möchten, kreuzen Sie folgendes Kästchen an:

☐ Ich trete von der Prüfung zurück. Meine Klausur soll mit der Note 5,0 bewertet werden.

Die erreichten Punkte bitte nicht ausfüllen.

Run $\LaTeX$ again to produce the table

Hinweise zur Klausur

- Die Klausur besteht aus sieben Aufgaben. Insgesamt können Sie maximal ?? Punkte erreichen. Mit 50 Punkten haben Sie sicher bestanden.
- Sie haben für die Bearbeitung 120 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein selbst mitgebrachtes Papier. Sollte der vorgesehene Platz nicht für Ihre Lösung ausreichen, verwenden Sie die Rückseiten. Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Blätter.
- Falls Sie eine Aufgabe nicht unmittelbar unter der Aufgabenstellung lösen, machen Sie klar kenntlich, wo die Lösung zu finden ist.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an die Aufsicht.
- Das Symbol $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen inklusive der Zahl 0.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Grundlagen

(a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. 1 Punkt $\{1, 2, 3\} \cup (\{3, 4, 5\} \cap \{5, 6, 7\})$

ii. 1 Punkt $\mathcal{P}(\{1\} \cup \{2\})$

iii. 1 Punkt $(\emptyset \setminus \{x\}) \cup (\{x\} \setminus \emptyset)$

iv. 1 Punkt $\{1, 2, 3\}^2$

v. 1 Punkt $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$

(b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. 1 Punkt $|\emptyset|$

ii. 1 Punkt $|\{\{\{\emptyset\}\}\}|$

iii. 1 Punkt $|\{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4, 5\}|$

iv. 1 Punkt $|\mathcal{P}(\{0, 1, 2\} \cup \{2, 3, 4\})|$

v. 1 Punkt $|\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < 100 \text{ and } n = m + 1\}|$

(c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n , dass

$$n^2 < 2^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen dabei folgendes Lemma annehmen: $2n + 1 < 2^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- i. 1 Punkt Aussage des Induktionsanfangs:

- ii. 2 Punkte Beweis des Induktionsanfangs:

- iii. 1 Punkt Induktionshypothese:

- iv. 1 Punkt Aussage des Induktionsschritts:

- v. 5 Punkte Beweis des Induktionsschritts:
(Markieren Sie eindeutig jede Anwendung der Induktionshypothese und gegebenenfalls des obigen Lemmas.)

Aufgabe 2 Ordnungen und Verbände

- (a) Seien A, B Mengen und sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf B . Sei $\preceq_F \subseteq (A \rightarrow B)^2$ eine binäre Relation auf dem Funktionsraum von allen Funktionen von A nach B , mit der Definition

$$f \preceq_F g \text{ gdw. } \forall x \in A (f(x) \preceq g(x))$$

für alle Funktionen $f, g : A \rightarrow B$. Ihre Aufgabe ist es, schrittweise zu beweisen, dass $\preceq_F$ eine partielle Ordnung ist.

- i. 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\preceq_F$ reflexiv ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „reflexiv“ oder „Reflexivität“ zu nutzen.

- ii. 2 Punkte Beweisen Sie die Reflexivität von $\preceq_F$.

- iii. 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\preceq_F$ transitiv ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „transitiv“ oder „Transitivität“ zu nutzen.

- iv. 2 Punkte Beweisen Sie die Transitivität von $\preceq_F$.

Zur Erinnerung: Für alle $f, g : A \rightarrow B$ gilt: $f \preceq_F g$ gdw. $\forall x \in A (f(x) \preceq g(x))$.

- v. 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\preceq_F$ antisymmetrisch ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „antisymmetrisch“ oder „Antisymmetrie“ zu nutzen.

- vi. 2 Punkte Beweisen Sie die Antisymmetrie von $\preceq_F$. Sie dürfen die folgende „Extensionalitätseigenschaft“ ohne Beweis nutzen:

$$f = g \text{ gdw. } \forall x \in A (f(x) = g(x))$$

für alle $f, g : A \rightarrow B$.

(b) Sei $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine sechselementige Menge. Sei $\preceq$ die kleinste partielle Ordnung auf A , sodass gilt $a \preceq b$, $a \preceq c$, $b \preceq d$, $c \preceq e$, $d \preceq f$ und $e \preceq f$. Für die drei Teilaufgaben unten ist keine Begründung erforderlich.

i. 2 Punkte Geben Sie die Menge der oberen Schranken von b und c an.

ii. 2 Punkte Geben Sie die Menge der Infima von b und c an.

iii. 2 Punkte Geben Sie die Menge der Suprema von b und c an.

Aufgabe 3 Zahlentheorie und Arithmetik

- (a) 4 Punkte Beweisen Sie die folgende Aussage oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel:

$a \equiv b \pmod{2}$ und $b \equiv c \pmod{3}$ impliziert $a \equiv c \pmod{5}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- (b) 6 Punkte Berechnen Sie $3^{17} \bmod 4$. Erläutern Sie Ihre Berechnung.

Aufgabe 4 10 Punkte Algebra

Berechnen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome $2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 4$ und $2x^2 + 3$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$. Schreiben Sie jeden Zwischenschritt explizit.

Sie dürfen die Tabellen unten oder das nächste Blatt nutzen. In den Tabellen müssen nicht unbedingt alle Zeilen verwendet werden.

Schritt 1: _____ mod _____ über $\mathbb{Z}_7$

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
—						
—						
—						
—						
—						
—						

Schritt 2: _____ mod _____ über $\mathbb{Z}_7$

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
—						
—						
—						
—						
—						
—						

Größter gemeinsamer Teiler: _____

Zur Erinnerung: Die Polynome sind $2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 4$ und $2x^2 + 3$ über $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 5 Kombinatorik

- (a) 3 Punkte Sei eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen. Für diese Teilaufgabe ist ein Zyklus eine Anordnung der n Elemente in einem Kreis. Zwei Zyklen werden als gleich betrachtet, wenn es eine Umdrehung gibt, die vom einen Zyklus zum anderen Zyklus führt. Zum Beispiel sind für die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ die folgenden Zyklen gleich:

1	0	2	3
0 3	2 1	3 0	1 2
2	3	1	0

Wie viele Zyklen von n Elementen gibt es? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

- (b) 3 Punkte Ein Anagramm ist ein String, der durch Umstellung von Symbolen aus einem anderen String entstanden ist. Zum Beispiel ist 000110 ein Anagramm von 101000. Der String s über dem Alphabet $\{0, 1\}$ mit Länge n enthält m -mal das Symbol 0. Wie viele Anagramme von s gibt es? Eine Begründung ist nicht erforderlich.
- (c) 4 Punkte Ein Palindrom der Länge $n \in \mathbb{N}$ über einem Alphabet Σ ist ein String über Σ der Form $a_1 \dots a_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, der sich vorwärts und rückwärts gleich liest – d.h. $a_1 \dots a_n = a_n \dots a_1$. Wie viele Palindrome der Länge n über $\{0, 1, 2\}$ gibt es? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 6 Aussagenlogik

- (a)
- 5 Punkte
- Füllen Sie die Wahrheitstabelle der folgenden Formel
- φ
- aus:

$$\varphi = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

Sie dürfen die leere Spalte für Zwischenschritte nutzen. Diese werden allerdings nicht bewertet.

a	b	c		φ
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

- (b)
- 5 Punkte
- Schreiben Sie eine Formel
- ψ
- in disjunktiver Normalform, welche folgende Wahrheitstabelle hat. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

x	y	z	ψ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- (c) 10 Punkte Betrachtet wird ein Resolutionskalkül für die Aussagenlogik, welcher Klauseln als Mengen von Literalen auffasst und aus folgender Regel besteht:

$$\frac{C \vee a \quad D \vee \bar{a}}{C \vee D}$$

Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel in konjunktiver Normalform unerfüllbar ist, wobei $a, \dots, g$ Variablen und $C_1, \dots, C_7$ Klauselnamen sind:

$$\begin{array}{c} \overbrace{(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f)}^{C_1} \wedge \overbrace{(a \vee \neg b \vee c \vee \neg e \vee g)}^{C_2} \wedge \\ \underbrace{(a \vee c \vee \neg g)}_{C_3} \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{C_4} \wedge \underbrace{\neg a}_{C_5} \wedge \underbrace{\neg c}_{C_6} \wedge \underbrace{e}_{C_7} \end{array}$$

Geben Sie für jeden Schritt an, welche zwei Klauseln resoliert werden, und was der Resolvent ist.

Aufgabe 7 Prädikatenlogik erster Stufe

- (a) Wir betrachten die Welt und ihre Bäume. Folgende Konstante und Prädikate stehen zur Verfügung:

a : der Apfelbaum im Garten des Prof. Strickroth
 $L(x, y)$: Baum x hat die gleiche Anzahl Blätter wie Baum y
 $F(x)$: das Obst des Baums x ist lecker
 $G(x)$: Baum x befindet sich in Deutschland
 $x \approx y$: Baum x und y sind derselbe Baum

Beschreiben Sie die folgenden Zusammenhänge mit prädikatenlogischen Formeln. Geben Sie alle Quantoren an.

- i. 2 Punkte „Nicht jeder Baum befindet sich in Deutschland.“
- ii. 2 Punkte „Es gibt mindestens zwei Bäume auf der ganzen Welt mit der gleichen Anzahl Blätter.“
- iii. 2 Punkte „Der Apfelbaum im Garten des Prof. Strickroth hat leckeres Obst und keine anderen Bäume haben leckeres Obst.“
- iv. 2 Punkte „Kein Baum in Deutschland hat die gleiche Anzahl Blätter wie der Apfelbaum im Garten des Prof. Strickroth.“

- (b) 7 Punkte Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ eine Sprache erster Stufe mit $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ und $\mathcal{P} = \{P, Q\}$, wobei $k(P) = k(Q) = 1$. Leiten Sie die folgende Formel mit Hilfe des Sequenzenkalküls her:

$$(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)))$$

Kennzeichnen Sie alle angewendeten Regeln. Permutationen müssen nicht angegeben werden.

Siehe das letzte Blatt für die Regeln.

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}(\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}(\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}(\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}(\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}(\wedge\text{-R})$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}(\vee\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee\text{-R})$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}(\rightarrow\text{-L}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}(\rightarrow\text{-R})$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}(\neg\text{-L}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}(\neg\text{-R})$$

$\forall$ -Quantor:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}(\forall\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}(\forall\text{-R})$$

$\exists$ -Quantor:

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}(\exists\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}(\exists\text{-R})$$

Bei den Regeln ($\forall$ -R) und ($\exists$ -L) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: Die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.