

Musterlösung für die reguläre Klausur zur Vorlesung Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2026

22.07.2026

Hinweise zur Vorbereitung

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an die Aufsicht.
- Schalten Sie Ihre elektronischen Geräte (u.a. Mobiltelefone, Tablets, Smartwatches) aus.
- Auf Ihrem Tisch dürfen Sie nur Stifte, Ihren Studentenausweis sowie Lebensmittel haben.
- Geben Sie alle anderen Gegenstände – insbesondere Rucksäcke und Jacken – bei der Aufsicht ab.
- Nutzen Sie keine Rot-, Grün- oder Bleistifte.
- Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.
- Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Vorname (in GROSSBUCHSTABEN)	
Nachname (in GROSSBUCHSTABEN)	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Unterschrift	

Rücktritt Sie haben die Möglichkeit, notenschädlich von der Klausur zurückzutreten. Falls Sie dies möchten, kreuzen Sie folgendes Kästchen an:

☐ Ich trete von der Prüfung zurück. Meine Klausur soll mit der Note 5,0 bewertet werden.

Die erreichten Punkte bitte nicht ausfüllen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	20	15	10	10	10	20	15	100
Erreicht								

Hinweise zur Klausur

- Die Klausur besteht aus sieben Aufgaben. Insgesamt können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Mit 50 Punkten haben Sie sicher bestanden.
- Sie haben für die Bearbeitung 120 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein selbst mitgebrachtes Papier. Sollte der vorgesehene Platz nicht für Ihre Lösung ausreichen, verwenden Sie die Rückseiten. Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Blätter.
- Falls Sie eine Aufgabe nicht unmittelbar unter der Aufgabenstellung lösen, machen Sie klar kenntlich, wo die Lösung zu finden ist.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an die Aufsicht.
- Das Symbol $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen inklusive der Zahl 0.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Grundlagen

(a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. 1 Punkt $\{1, 2, 3\} \cup (\{3, 4, 5\} \cap \{5, 6, 7\})$

Musterlösung:

$$\{1, 2, 3, 5\}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

ii. 1 Punkt $\mathcal{P}(\{1\} \cup \{2\})$

Musterlösung:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

iii. 1 Punkt $(\emptyset \setminus \{x\}) \cup (\{x\} \setminus \emptyset)$

Musterlösung:

$$\{x\}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

iv. 1 Punkt $\{1, 2, 3\}^2$

Musterlösung:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

v. 1 Punkt $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$

Musterlösung:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

(b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. 1 Punkt $|\emptyset|$

Musterlösung:

$$0$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

ii. 1 Punkt $|\{\{\{\emptyset\}\}\}|$

Musterlösung:

$$1$$

(1P für eine korrekte Lösung.)

iii. 1 Punkt $|\{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4, 5\}|$

Musterlösung:

12

(1P für eine korrekte Lösung.)

iv. 1 Punkt $|\mathcal{P}(\{0, 1, 2\} \cup \{2, 3, 4\})|$

Musterlösung:

32

(1P für eine korrekte Lösung.)

v. 1 Punkt $|\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < 100 \text{ and } n = m + 1\}|$

Musterlösung:

100

(1P für eine korrekte Lösung.)

(c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n , dass

$$n^2 < 2^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen dabei folgendes Lemma annehmen: $2n + 1 < 2^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

i. 1 Punkt Aussage des Induktionsanfangs:

Musterlösung:

$$0^2 < 2^{0+1}.$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

ii. 2 Punkte Beweis des Induktionsanfangs:

Musterlösung:

$$0^2 = 0 < 2 = 2^{0+1}.$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

iii. 1 Punkt Induktionshypothese:

Musterlösung:

$$n^2 < 2^{n+1}.$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

iv. 1 Punkt Aussage des Induktionsschritts:

Musterlösung:

$$(n+1)^2 < 2^{n+2}.$$

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

v. 5 Punkte Beweis des Induktionsschritts:

(Markieren Sie eindeutig jede Anwendung der Induktionshypothese und gegebenenfalls des obigen Lemmas.)

Musterlösung:

$$\begin{aligned} & (n+1)^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 && \text{(durch die binomische Formel)} \\ &< 2^{n+1} + 2n + 1 && \text{(durch die Induktionshypothese)} \\ &< 2^{n+1} + 2^{n+1} && \text{(durch das Lemma)} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

(**1P** für die Nutzung der binomischen Formel. **1P** für die Nutzung der Induktionshypothese. **1P** für die Nutzung des Lemmas. **1P** für die Potenzenumschreibung. **1P** für die Markierung der Induktionshypothese und des Lemmas.)

Aufgabe 2 Ordnungen und Verbände

- (a) Seien A, B Mengen und sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf B . Sei $\preceq_F \subseteq (A \rightarrow B)^2$ eine binäre Relation auf dem Funktionsraum von allen Funktionen von A nach B , mit der Definition

$$f \preceq_F g \text{ gdw. } \forall x \in A (f(x) \preceq g(x))$$

für alle Funktionen $f, g : A \rightarrow B$. Ihre Aufgabe ist es, schrittweise zu beweisen, dass $\preceq_F$ eine partielle Ordnung ist.

- i. 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\preceq_F$ reflexiv ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „reflexiv“ oder „Reflexivität“ zu nutzen.

Musterlösung:

$f \preceq_F f$ für alle $f : A \rightarrow B$.

(1P für eine korrekte Lösung.)

- ii. 2 Punkte Beweisen Sie die Reflexivität von $\preceq_F$.

Musterlösung:

Per Definition ist die Aussage äquivalent zu

$$\forall x \in A (f(x) \preceq f(x))$$

Dies gilt, weil $\preceq$ reflexiv ist.

(2P für eine korrekte Lösung. Sonst, 1P für einen sinnvollen Ansatz.)

- iii. 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\preceq_F$ transitiv ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „transitiv“ oder „Transitivität“ zu nutzen.

Musterlösung:

$f \preceq_F g$ und $g \preceq_F h$ implizieren $f \preceq_F h$ für alle $f, g, h : A \rightarrow B$.

(1P für eine korrekte Lösung.)

- iv. 2 Punkte Beweisen Sie die Transitivität von $\preceq_F$.

Musterlösung:

Per Definition ist die Aussage äquivalent zu

$$\forall x \in A (f(x) \preceq g(x)) \wedge \forall y \in A (g(y) \preceq h(y)) \rightarrow \forall z \in A (f(z) \preceq h(z))$$

Um die Konklusion zu beweisen, nimm ein festes z und zeige dafür $f(z) \preceq h(z)$. Instanziiere dann x und y mit z . Das Ziel ist nun

$$f(z) \preceq g(z) \wedge g(z) \preceq h(z) \rightarrow f(z) \preceq h(z)$$

Dies gilt, weil $\preceq$ transitiv ist.

(2P für eine korrekte Lösung. Sonst, 1P für einen sinnvollen Ansatz.)

Zur Erinnerung: Für alle $f, g : A \rightarrow B$ gilt: $f \preceq_F g$ gdw. $\forall x \in A (f(x) \preceq g(x))$.

- v. 1 Punkt Drücken Sie die Aussage, dass $\preceq_F$ antisymmetrisch ist, mathematisch aus, ohne dabei das Wort „antisymmetrisch“ oder „Antisymmetrie“ zu nutzen.

Musterlösung:

$f \preceq_F g$ und $g \preceq_F f$ impliziert $f = g$ für alle $f, g : A \rightarrow B$.

(**1P** für eine korrekte Lösung.)

- vi. 2 Punkte Beweisen Sie die Antisymmetrie von $\preceq_F$. Sie dürfen die folgende „Extensionalitätseigenschaft“ ohne Beweis nutzen:

$$f = g \text{ gdw. } \forall x \in A (f(x) = g(x))$$

für alle $f, g : A \rightarrow B$.

Musterlösung:

Per Definition ist die Aussage äquivalent zu

$$\forall x \in A (f(x) \preceq g(x)) \wedge \forall y \in A (g(y) \preceq f(y)) \rightarrow f = g$$

Um die Konklusion $f = g$ zu beweisen, reicht es durch Extensionalität zu zeigen, dass $f(z) = g(z)$ für ein festes z gilt. Instanzieren Sie x und y mit z . Dies führt zu folgendem Ziel:

$$f(z) \preceq g(z) \wedge g(z) \preceq f(z) \rightarrow f(z) = g(z)$$

Dies gilt, weil $\preceq$ antisymmetrisch ist.

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- (b) Sei $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine sechselementige Menge. Sei $\preceq$ die kleinste partielle Ordnung auf A , sodass gilt $a \preceq b$, $a \preceq c$, $b \preceq d$, $c \preceq e$, $d \preceq f$ und $e \preceq f$. Für die drei Teilaufgaben unten ist keine Begründung erforderlich.

- i. 2 Punkte Geben Sie die Menge der oberen Schranken von b und c an.

Musterlösung:

$\{f\}$

(**2P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

- ii. 2 Punkte Geben Sie die Menge der Infima von b und c an.

Musterlösung:

$\{a\}$

(**2P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

- iii. 2 Punkte Geben Sie die Menge der Suprema von b und c an.

Musterlösung:

$\{f\}$

(**2P** für die richtige Lösung. Sonst, **0P**.)

Aufgabe 3 Zahlentheorie und Arithmetik

- (a) 4 Punkte Beweisen Sie die folgende Aussage oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel:

$a \equiv b \pmod{2}$ und $b \equiv c \pmod{3}$ impliziert $a \equiv c \pmod{5}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Musterlösung:

Gegenbeispiel: $a = 0, b = 2, c = 8$

(**1P** für Gegenbeispiel (und nicht Beweis). **3P** für richtiges Gegenbeispiel.)

- (b) 6 Punkte Berechnen Sie $3^{17} \bmod 4$. Erläutern Sie Ihre Berechnung.

Musterlösung:

Ergebnis: 3

Rechenweg:

Setze $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 4$.

Berechne die α -Folge:

$$\alpha_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \alpha_0^2 \bmod 4 = 3^2 \bmod 4 = 1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 \bmod 4 = 1^2 \bmod 4 = 1$$

$$\alpha_3 = \alpha_2^2 \bmod 4 = 1^2 \bmod 4 = 1$$

$$\alpha_4 = \alpha_3^2 \bmod 4 = 1^2 \bmod 4 = 1$$

Berechne das Ergebnis: $(\alpha_0 \cdot \alpha_4) \bmod 4 = (3 \cdot 1) \bmod 4 = 3$.

(**2P** für ein richtiges Ergebnis. **1P** für die Definition der β 's. **2P** für die Berechnung der α 's. **1P** für die Berechnung des Ergebnis.)

Aufgabe 4 10 Punkte Algebra

Berechnen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome $2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 4$ und $2x^2 + 3$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$. Schreiben Sie jeden Zwischenschritt explizit.

Sie dürfen die Tabellen unten oder das nächste Blatt nutzen. In den Tabellen müssen nicht unbedingt alle Zeilen verwendet werden.

Schritt 1: $2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 4 \mod 2x^2 + 3$ über $\mathbb{Z}_7$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
	2	5	3	1	4	4	
–	2	0	3				$= x^3 \cdot (2x^2 + 3)$
	0	5	0	1	4	4	
–		5	0	4			$= 6x^2 \cdot (2x^2 + 3)$
		0	0	4	4	4	
–				4	0	6	$= 2 \cdot (2x^2 + 3)$
				0	4	5	
–							
–							
–							

Schritt 2: $2x^2 + 3 \mod 4x + 5$ über $\mathbb{Z}_7$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
				2	0	3	
–				2	6		$= 4x \cdot (4x + 5)$
				0	1	3	
–					1	3	$= 2 \cdot (4x + 5)$
					0	0	
–							
–							
–							

Größter gemeinsamer Teiler: $4x + 5$

Musterlösung:

Siehe die Einträge in den Tabellen und auf der Zeile oben.

(**1P** für die richtigen Polynome in Schritt 1. **4P** für die Berechnungsschritte in Schritt 1. **1P** für die richtigen Polynome in Schritt 2. **3P** für die Berechnungsschritte in Schritt 2. **1P** für einen richtigen größten gemeinsamen Teiler. Folgefehler werden betrachtet und nicht bestraft.)

Zur Erinnerung: Die Polynome sind $2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 4$ und $2x^2 + 3$ über $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 5 Kombinatorik

- (a) 3 Punkte Sei eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen. Für diese Teilaufgabe ist ein Zyklus eine Anordnung der n Elemente in einem Kreis. Zwei Zyklen werden als gleich betrachtet, wenn es eine Umdrehung gibt, die vom einen Zyklus zum anderen Zyklus führt. Zum Beispiel sind für die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ die folgenden Zyklen gleich:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Wie viele Zyklen von n Elementen gibt es? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$(n - 1)!$$

Alternative Lösung:

$$n!/n$$

(3P für eine richtige Lösung.)

- (b) 3 Punkte Ein Anagramm ist ein String, der durch Umstellung von Symbolen aus einem anderen String entstanden ist. Zum Beispiel ist 000110 ein Anagramm von 101000. Der String s über dem Alphabet $\{0, 1\}$ mit Länge n enthält m -mal das Symbol 0. Wie viele Anagramme von s gibt es? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$\binom{n}{m}$$

(3P für eine richtige Lösung.)

- (c) 4 Punkte Ein Palindrom der Länge $n \in \mathbb{N}$ über einem Alphabet Σ ist ein String über Σ der Form $a_1 \dots a_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, der sich vorwärts und rückwärts gleich liest – d.h. $a_1 \dots a_n = a_n \dots a_1$. Wie viele Palindrome der Länge n über $\{0, 1, 2\}$ gibt es? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

Musterlösung:

$$3^{\lceil n/2 \rceil}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{cases} 3^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ 3^{(n+1)/2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

(2P für eine richtige Lösung für den Fall, in dem n gerade ist. 2P für eine richtige Lösung für den Fall, in dem n ungerade ist.)

Aufgabe 6 Aussagenlogik

- (a)
- 5 Punkte**
- Füllen Sie die Wahrheitstabelle der folgenden Formel
- φ
- aus:

$$\varphi = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

Sie dürfen die leere Spalte für Zwischenschritte nutzen. Diese werden allerdings nicht bewertet.

a	b	c		φ
0	0	0		1
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		1

Musterlösung:

Siehe die Einträge in der letzten Spalte oben.

(−1P pro falsche Zeile.)

- (b)
- 5 Punkte**
- Schreiben Sie eine Formel
- ψ
- in disjunktiver Normalform, welche folgende Wahrheitstabelle hat. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

x	y	z	ψ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Musterlösung:

$$\psi = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

(1P pro Term.)

Alternative Lösung:

$$\psi = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

Aufgabe 6 wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

(**1P** je für den ersten, zweiten und vierten Term. **2P** für den dritten Term.)

- (c) 10 Punkte Betrachtet wird ein Resolutionskalkül für die Aussagenlogik, welcher Klauseln als Mengen von Literalen auffasst und aus folgender Regel besteht:

$$\frac{C \vee a \quad D \vee \bar{a}}{C \vee D}$$

Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel in konjunktiver Normalform unerfüllbar ist, wobei $a, \dots, g$ Variablen und $C_1, \dots, C_7$ Klauselnamen sind:

$$\begin{array}{c} \overbrace{(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f)}^{C_1} \wedge \overbrace{(a \vee \neg b \vee c \vee \neg e \vee g)}^{C_2} \wedge \\ \underbrace{(a \vee c \vee \neg g)}_{C_3} \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{C_4} \wedge \underbrace{\neg a}_{C_5} \wedge \underbrace{\neg c}_{C_6} \wedge \underbrace{e}_{C_7} \end{array}$$

Geben Sie für jeden Schritt an, welche zwei Klauseln resoliert werden, und was der Resolvent ist.

Musterlösung:

$$\begin{array}{ll} C_8 = a \vee \neg b \vee c \vee \neg e & (\text{aus } C_2 \text{ und } C_3) \\ C_9 = \neg b \vee c \vee \neg e & (\text{aus } C_8 \text{ und } C_5) \\ C_{10} = c \vee \neg e & (\text{aus } C_4 \text{ und } C_9) \\ C_{11} = \neg e & (\text{aus } C_{10} \text{ und } C_6) \\ C_{12} = \perp & (\text{aus } C_7 \text{ und } C_{11}) \end{array}$$

(Für jede Inferenz: **1P** für die zwei Klauseln und **1P** für den Resolvent. Für die letzte Inferenz: der Resolvent muss $\perp$ sein.)

Aufgabe 7 Prädikatenlogik erster Stufe

- (a) Wir betrachten die Welt und ihre Bäume. Folgende Konstante und Prädikate stehen zur Verfügung:

a : der Apfelbaum im Garten des Prof. Strickroth
 $L(x, y)$: Baum x hat die gleiche Anzahl Blätter wie Baum y
 $F(x)$: das Obst des Baums x ist lecker
 $G(x)$: Baum x befindet sich in Deutschland
 $x \approx y$: Baum x und y sind derselbe Baum

Beschreiben Sie die folgenden Zusammenhänge mit prädikatenlogischen Formeln. Geben Sie alle Quantoren an.

- i. 2 Punkte „Nicht jeder Baum befindet sich in Deutschland.“

Musterlösung:

$$\neg \forall x G(x)$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- ii. 2 Punkte „Es gibt mindestens zwei Bäume auf der ganzen Welt mit der gleichen Anzahl Blätter.“

Musterlösung:

$$\exists x, y (\neg(x \approx y) \wedge L(x, y))$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- iii. 2 Punkte „Der Apfelbaum im Garten des Prof. Strickroth hat leckeres Obst und keine anderen Bäume haben leckeres Obst.“

Musterlösung:

$$F(a) \wedge \forall x (F(x) \rightarrow x \approx a)$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- iv. 2 Punkte „Kein Baum in Deutschland hat die gleiche Anzahl Blätter wie der Apfelbaum im Garten des Prof. Strickroth.“

Musterlösung:

$$\neg \exists x (G(x) \wedge L(x, a))$$

(**2P** für eine korrekte Lösung. Sonst, **1P** für einen sinnvollen Ansatz.)

- (b) 7 Punkte Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ eine Sprache erster Stufe mit $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ und $\mathcal{P} = \{P, Q\}$, wobei $k(P) = k(Q) = 1$. Leiten Sie die folgende Formel mit Hilfe des Sequenzenkalküls her:

$$(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)))$$

Kennzeichnen Sie alle angewendeten Regeln. Permutationen müssen nicht angegeben werden.

Siehe das letzte Blatt für die Regeln.

Musterlösung:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{P(\textcolor{red}{v}), \forall x Q(x) \vdash P(\textcolor{red}{v}), Q(\textcolor{red}{w})} \text{(Axiom)} \\
 \frac{}{\forall x P(x), \forall x Q(x) \vdash P(\textcolor{red}{v}), Q(\textcolor{red}{w})} (\forall\text{-L}) \\
 \frac{}{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash P(\textcolor{red}{v}), Q(\textcolor{red}{w})} (\wedge\text{-L}) \\
 \frac{}{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash P(\textcolor{red}{v}) \vee Q(\textcolor{red}{w})} (\vee\text{-R}) \\
 \frac{}{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall y (P(\textcolor{red}{v}) \vee Q(y))} (\forall\text{-R}) \\
 \frac{}{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))} (\forall\text{-R}) \\
 \frac{}{\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)))} (\rightarrow\text{-R})
 \end{array}$$

(1P pro richtige Zeile samt richtig gekennzeichnete(r) Regel. Lineare Beweise werden auch akzeptiert. Die *Eigenvariablen-Bedingung* muss nicht angegeben, aber wohl beachtet werden.)

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}(\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}(\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}(\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}(\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}(\wedge\text{-R})$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}(\vee\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee\text{-R})$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}(\rightarrow\text{-L}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}(\rightarrow\text{-R})$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}(\neg\text{-L}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}(\neg\text{-R})$$

$\forall$ -Quantor:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}(\forall\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}(\forall\text{-R})$$

$\exists$ -Quantor:

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}(\exists\text{-L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}(\exists\text{-R})$$

Bei den Regeln ($\forall$ -R) und ($\exists$ -L) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: Die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.