

Klausur Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2025

5. August 2025

Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an eine prüfende Person.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
 - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
 - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
 - Lebensmittel
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie Ihren Namen in Druckbuchstaben auf jedes Blatt. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in Druckbuchstaben aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	
Unterschrift	

Rücktritt: Sie haben die Möglichkeit, notenschädlich aus der Klausur zurückzutreten. Falls Sie es möchten, kreuzen Sie folgendes Kästchen an:

☐ Ich trete von der Prüfung zurück. Meine Klausur soll mit der Note 5.0 bewertet werden.

Die erreichten Punkte und die Note werden bei der Korrektur ausgefüllt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	12	12	8	12	12	12	12	80
Erreicht								

Note: _____

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 80 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

Wichtige fachliche Hinweise:

- $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

V i e l E r f o l g !

Aufgabe 1 Mengen

(a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. (1 Punkt) $(\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\}) \cap (\{a, b, c\} \cup \{c, e, e, f\})$

ii. (1 Punkt) $\{1, 2\} \times \{\{3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\}\}$

iii. (1 Punkt) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\} \setminus (\{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9\}))$

(b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i. (1 Punkt) $|\{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}|$

ii. (1 Punkt) $|\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f, g, h\})|$

iii. (1 Punkt) $|\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(\{\})|$ für eine beliebige endliche Menge A

iv. (1 Punkt) $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x < y \wedge y < 4\}|$

- (c) (5 Punkte) Beweisen Sie durch zwei Inklusionsteilbeweise, dass für jede Mengen A, B, C folgende Aussage gilt:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

Aufgabe 2 (12 Punkte) Induktion

Beweisen Sie per Induktion, dass für jede endliche Menge M folgende Aussage gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Benutzen Sie dafür die gegebene Skizze. Markieren Sie eindeutig jede Anwendung der Induktionshypothese.

Induktion über: _____

Induktionsanfang: _____

Beweis:

Induktionsschritt: _____

Induktionshypothese (IH): _____

Beweis:

Aufgabe 3 Homomorphismen

Sei L die Menge aller Listen von ganzen Zahlen, das heißt, die Menge aller Listen der Form $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, wobei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$.

Beispiele:

- $[-1, 2, 3] \in L$
- $[0, 1, 6, -9, 0, 2] \in L$
- $[] \in L$ (die *leere Liste*)

Die Operation $\circ$ konkateniert zwei Listen:

$$[x_1, \dots, x_n] \circ [y_1, \dots, y_m] := [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

Beispiele:

- $[1, 2, 5] \circ [1, 3, 4, 6] = [1, 2, 5, 1, 3, 4, 6]$
- $[] \circ [0, 1, 6, -9, 0, 2] = [0, 1, 6, -9, 0, 2]$

(a) Sei $s : L \rightarrow L$ eine Funktion von $(L, \circ)$ nach $(L, \circ)$, welche die Elemente einer Liste absteigend sortiert (z. B. $s([3, -1, 2, -1, 0]) = [3, 2, 0, -1, -1]$).

i. (2 Punkte) Ist s ein Homomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

ii. (2 Punkte) Ist s ein Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

(b) Sei $g : L \rightarrow L$ eine Funktion von $(L, \circ)$ nach $(L, \circ)$, welche in einer Liste alle Zahlen um 2 inkrementiert (z. B. $g([-1, 4, 6]) = [1, 6, 8]$).

i. (2 Punkte) Ist g ein Homomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

ii. (2 Punkte) Ist g ein Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4 Algebraische Strukturen

Gegeben sei die algebraische Struktur $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ mit $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b + d + a \cdot c)$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

- (a) (3 Punkte) Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ eine Halbgruppe? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

- (b) (3 Punkte) Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ ein Monoid? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

- (c) (3 Punkte) Ist $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

- (d) (3 Punkte) Ist $\star$ kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 5 (12 Punkte) Polynome

Berechnen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome $x^5 + x^3 + x^2 + 3x + 2$ und $x^2 + 3x + 2$ über dem Körper $\mathbb{Z}_5$. Schreiben Sie jeden Zwischenschritt explizit. (Nicht alle Zeilen müssen verwendet werden.)

Schritt 1: _____ mod _____

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
-						
-						
-						
-						
-						
-						

Schritt 2: _____ mod _____

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
-						
-						
-						
-						
-						
-						

Größter gemeinsamer Teiler:

Aufgabe 6 Aussagenlogik

- (a) Gegeben sei folgende Formel $\phi = x_1 \vee (((x_1 \vee x_4) \rightarrow (x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow (\neg x_3))$.
- i. (4 Punkte) Füllen Sie die Wahrheitstabelle der Formel ϕ aus. (Sie dürfen die leere Spalte für Zwischenschritte benutzen, diese werden allerdings nicht bewertet.)

x_1	x_2	x_3	x_4		ϕ
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		

- ii. (1 Punkt) Ist die Formel ϕ tautologisch, erfüllbar, unerfüllbar?
- tautologisch ☐ Ja ☐ Nein
- erfüllbar ☐ Ja ☐ Nein
- unerfüllbar ☐ Ja ☐ Nein

- iii. (2 Punkte) Schreiben Sie eine zur Formel ϕ äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. (Dabei kann die oben ausgefüllte Wahrheitstabelle nützlich sein.)

- (b) (5 Punkte) Betrachtet wird ein Resolutionskalkül, welches Klauseln als Mengen von Literalen auffasst und aus folgender Regel besteht:

$$\frac{C \vee a \quad D \vee \neg a}{C \vee D}$$

Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass folgende Formel in konjunktiver Normalform unerfüllbar ist:

$$\underbrace{(a \vee d)}_{C_1} \wedge \underbrace{(a \vee b \vee c \vee d)}_{C_2} \wedge \underbrace{(b \vee \neg d)}_{C_3} \wedge \underbrace{(\neg b \vee e)}_{C_4} \wedge \underbrace{(\neg b \vee \neg e)}_{C_5} \wedge \underbrace{(\neg a \vee f)}_{C_6} \wedge \underbrace{(\neg a \vee \neg f)}_{C_7}$$

Aufgabe 7 (12 Punkte) Prädikatenlogik

Leiten Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (siehe letzte Seite) her:

$$\exists x(R(x) \rightarrow \neg \exists x(\neg S(x))) \Rightarrow \forall y(\exists x(R(x) \rightarrow S(y)))$$

(Permutationen müssen **nicht** angegeben werden.)

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta} (Perm-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} (Perm-R)$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} (Contr-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (Contr-R)$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge-R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee-R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} (\rightarrow-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow-R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} (\neg-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} (\neg-R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x:t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x:y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln $(\forall-R)$ und $(\exists-L)$ gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.