

Klausur Logik und Diskrete Strukturen Sommersemester 2024

4. Oktober 2024

Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an einen Prüfer.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
 - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
 - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
 - Getränke
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in DRUCKBUCHSTABEN aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	

Bitte *nur* ankreuzen, wenn die Klausur entwertet und nicht korrigiert werden soll. (Please check with an X *only* if the exam should be voided and not graded.)

Wird bei der Korrektur ausgefüllt:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte	10	9	6	10	8	14	13	70
Erreicht								

Name:

Matr-Nr.:

Seite 2/20

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 70 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

Wichtige fachliche Hinweise:

- \mathbb{N} beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

V i e l E r f o l g !

Name:

Matr-Nr.:

Seite 4/20

Aufgabe 1 (Mengen und Relationen, 3 + 2 + 5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) $(\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \cap \{2, 3, 4, 5\}$

ii) $\mathcal{P}(\{a\}) \times \{b\}$

iii) $\bigcup_{i=0}^4 \{i\}$

b) Geben Sie eine Relation $R \subseteq \{a, b, c\}^2$ an, die die folgenden Eigenschaften erfüllt. Geben Sie die Mengen der vollständigen Paare der Relation an.

Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) reflexiv, transitiv, symmetrisch

ii) totale Ordnung

c) Beweisen oder widerlegen Sie **beide** Richtungen der folgenden Aussage ohne Äquivalenzumformungen:

$$(A \cup B) \setminus (B \cup C) = A \setminus C$$

(Ein Venn-Diagramm reicht **nicht** als Beweis.)

Name:

Matr-Nr.:

Seite 6/20

Aufgabe 2 (Induktion, 9 Punkte)

Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

Markieren Sie die Anwendung der Induktionshypothese!

Name:

Matr-Nr.:

Seite 8/20

Aufgabe 3 (Funktionen, 6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ und $g : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ die Funktionen:

$f(x) := 3 \cdot x$ und $g(x) := 2 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{Z}_7$.

\cdot ist hierbei die übliche Multiplikation auf \mathbb{Z}_7 (Multiplikation Modulo 7).

- a) Geben Sie f , f^{-1} und $f \circ g$ als Mengen der vollständigen Paare der Funktionen an.
- b) Geben Sie, falls vorhanden, die Zyklen von g , g^{-1} und $g \circ f$ an.

Name:

Matr-Nr.:

Seite 10/20

Aufgabe 4 (Algebraische Strukturen, 10 Punkte)

Beweisen Sie bei den folgenden algebraischen Strukturen, welche dieser Eingruppierungen zutrifft:

- Keine Halbgruppe
- Eine Halbgruppe, aber kein Monoid
- Ein Monoid, aber keine Gruppe
- Eine Gruppe, aber nicht abelsch
- Abelsche Gruppe

a) $(\{n \in \mathbb{N}; n \text{ ist gerade}\}, +)$

b) $(\{f; f : M \rightarrow M\}, \oplus)$ wobei (M, \diamond) eine abelsche Gruppe ist und $(f \oplus g)(x) := f(x) \diamond g(x)$ für alle $x \in M$.

Das heißt in (M, \diamond) existiert ein neutrales Element d und jedes Element x hat ein inverses Element x^{-1} .

Name:

Matr-Nr.:

Seite 12/20

Aufgabe 5 (Polynome, 4 + 4 Punkte)

- a) Das Polynom $p(x) := x^3 + 2x^2 + 3$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_5[x]$.
Berechnen Sie $(3x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 2)$ in $\mathbb{Z}_5[x]/p(x)$.
- b) Berechnen Sie mit dem Horner-Schema den Wert des Polynoms
 $p(x) := 2x^3 + x^2 + 3x + 2$ über \mathbb{Z}_7 an der Stelle 4.

Name:

Matr-Nr.:

Seite 14/20

Aufgabe 6 (Aussagenlogik, 5 + 9 Punkte)

- a) Geben Sie eine Wahrheitstafel der folgenden Formel an und bestimmen Sie ob diese unerfüllbar, erfüllbar aber keine Tautologie oder eine Tautologie ist:

$$F := (x \leftrightarrow y) \rightarrow ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))$$

- b) Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$((x \rightarrow y) \rightarrow ((\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y))) \vee \neg z$$

Name:

Matr-Nr.:

Seite 16/20

Aufgabe 7 (Prädikatenlogik, 4 + 9 Punkte)

a) $M = (\{a, e\}, \{\diamond\}, \{\dot{=}\})$ ist eine Sprache erster Stufe. Hierbei ist \diamond ein zweistelliges Funktionssymbol und $\dot{=}$ ein zweistelliges Prädikatensymbol (je in Infix-Notation). Folgende Formeln sind in der Sprache M definiert:

- $\neg(e \dot{=} a)$
- $\forall x \forall y \forall z (x \diamond (y \diamond z) \dot{=} (x \diamond y) \diamond z)$
- $\forall x (e \diamond x \dot{=} x)$
- $\forall x (x \diamond e \dot{=} x)$

Vervollständigen Sie die folgende Interpretation von M , sodass sie die definierten Formeln alle erfüllt:

- Grundmenge $G =$
- Konstanten:
 - $a \rightsquigarrow$
 - $e \rightsquigarrow$
- Funktionssymbole: $\diamond \rightsquigarrow$
- Prädikatensymbole: $\dot{=} \rightsquigarrow \{(x, x); x \in G\}$

b) Leiten Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (siehe letzte Seite) her:

$$R(c) \Rightarrow (\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))) \rightarrow (\exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)))$$

(Permutationen müssen **nicht** angegeben werden.)

Name:

Matr-Nr.:

Seite 18/20

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta} (\text{Perm-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} (\text{Perm-R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} (\text{Contr-L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (\text{Contr-R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge-R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee-R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} (\rightarrow-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow-R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} (\neg-L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} (\neg-R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x:t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x:y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists-L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln ($\forall-R$) und ($\exists-L$) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.

Name:

Matr-Nr.:

Seite 20/20
