Klausur Logik und Diskrete Strukturen
Sommersemester 2024

7. August 2024

Wichtige Hinweise zur Vorbereitung:

- Fühlen Sie sich gesundheitlich in der Lage, die Prüfung anzutreten? Wenden Sie sich anderenfalls umgehend an einen Prüfer.
- Schalten Sie, soweit noch nicht geschehen, Ihr Mobiltelefon aus.
- Entfernen Sie alle Gegenstände vom Tisch, außer:
  - einen Stift (kein Rot- oder Bleistift)
  - Ihren Studentenausweis und Ihren Personalausweis/Reisepass
  - Getränke
- Geben Sie alle anderen Gegenstände — insbesondere Rucksäcke und Jacken — bei der Aufsicht ab.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Füllen Sie insbesondere auch folgende Tabelle in Druckbuchstaben aus:

Vorname	
Nachname	
Matrikelnummer	

☐ **Bitte *nur* ankreuzen, wenn die Klausur entwertet und nicht korrigiert werden soll. (Please check with an X *only* if the exam should be voided and not graded.)**

Wird bei der Korrektur ausgefüllt:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte	10	9	12	9	7	10	13	70
Erreicht								

Wichtige Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 80 Punkte erreichen. Sie haben für die Bearbeitung 90 Minuten Zeit.
- Verwenden Sie kein zusätzliches, eigenes Papier. Um eigene Gedanken unfertig aufzuschreiben, können Sie die Rückseiten benutzen. Sollten Sie aus Platzgründen eine Lösung auf eine Rückseite schreiben müssen, so machen Sie dieses unbedingt gut kenntlich. In dringenden Fällen erhalten Sie auf Anfrage zusätzliche Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zuwiderhandlungen führen zum Ausschluss von der Klausur.
- Falls Sie eine Frage haben, wenden Sie sich bitte leise an einen der Tutoren.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Tipp: Sollten Sie bei einer Aufgabe nach längerem Überlegen keine Lösung finden, so fahren Sie lieber mit einer anderen Aufgabe fort.
- Tipp: Verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die Aufgaben, um herauszufinden, wo Sie mit Ihren persönlichen Stärken gut Punkte sammeln können.

Wichtige fachliche Hinweise:

- $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0.
- Solange nicht anders angegeben, sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise bzw. Zwischenschritte gefordert.
- Mehrere widersprüchliche Lösungen zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.

V i e l E r f o l g !

Aufgabe 1 (Mengen, 3 + 2 + 5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Mengen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

   i) $\{a, b, c\} \cap (\{a, d, d\} \cup \{c, e, f\})$

   ii) $\{1, 2\} \times \{\{\}, \{1, 2\}\}$

   iii) $\mathscr{P}(\{4, 5\})$

b) Berechnen Sie die folgenden Kardinalitäten. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

   i) $|\mathscr{P}(\{0, 1, 2, 3, 4\})|$

   ii) $|\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x + y = 4\}|$

c) Beweisen oder widerlegen Sie **beide** Richtungen der folgenden Aussage ohne Äquivalenzumformungen:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(Ein Venn-Diagramm reicht **nicht** als Beweis.)

Aufgabe 2 (Induktion, 9 Punkte)

Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(n^3 + 2n) \bmod 3 = 0$$

Aufgabe 3 (Verbände und Relationen, 3 + 3 + 6 Punkte)

Wir betrachten den Potenzmengenverband über eine beliebige Menge M, welcher gebildet wird durch $\mathscr{P}(M)$ mit der Relation $\subseteq$.

a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für den Potenzmengenverband mit $M = \{a, b, c\}$.

b) Berechnen Sie im Potenzmengenverband mit $M = \mathbb{N}$

   i) das kleinste und größte Element.

   ii) das Supremum von $\{1, 2, 3\}$ und $\{11, 12\}$.

   iii) das Infimum von $\{n; 2 \mid n\}$ und $\{n; 3 \mid n\}$.

c) Wir betrachten nur noch endliche M. Sind die folgenden Relationen partielle Ordnungen? Bildet $\mathscr{P}(M)$ mit den folgenden Relationen einen Verband?

   i) $R_1 = \{(X, Y) \in \mathscr{P}(M) \times \mathscr{P}(M); |X| \text{ ist ein Teiler von } |Y|\}$

   ii) $R_2 = \{(X, Y) \in \mathscr{P}(M) \times \mathscr{P}(M); X \subseteq Y \text{ und } |X| \bmod 2 = |Y| \bmod 2\}$

Aufgabe 4 (Algebraische Strukturen, 9 Punkte)

Beweisen Sie bei den folgenden algebraischen Strukturen, welche dieser Eingruppierungen zutrifft:

- Keine Halbgruppe
- Eine Halbgruppe, aber kein Monoid
- Ein Monoid, aber keine Gruppe
- Eine Gruppe, aber nicht abelsch
- Abelsche Gruppe

i) $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \cup)$

ii) $(\mathbb{Z}, \circ_k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $a \circ_k b := a + b + k$

Aufgabe 5 (Polynome, 7 Punkte)

Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler für die Polynome $4x^5 + 6x^4 + 6x^2 + 4x$ und $6x^3 + 3x^2 + 1$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 6 (Aussagenlogik, 4 + 6 Punkte)

a) Geben Sie eine Wahrheitstafel der folgenden Formel an und bestimmen Sie ob diese erfüllbar, unerfüllbar und/oder eine Tautologie ist:

$$F := x_0 \rightarrow (x_1 \vee (x_1 \leftrightarrow x_0))$$

b) Zeigen Sie mit einem Resolutionsbeweis, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$\neg(x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg(x_0 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \vee \neg x_0 \vee x_2$$

Aufgabe 7 (Prädikatenlogik, 4 + 9 Punkte)

a) Bringen Sie die folgende Formel in Pränex-Normalform:

$$\exists x(P(x)) \to (\neg\forall y(Q(y,y)) \to Q(f(x),x))$$

b) Leiten Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (siehe letzte Seite) her:

$$\exists x\forall y(P(x) \to Q(y)) \Rightarrow \forall y\exists x(Q(y) \vee \neg P(x))$$

(Permutationen müssen **nicht** angegeben werden.)

Sequenzenkalkül

Die Schlussregeln des Sequenzenkalküls erlauben aus bekannten Sequenzen (Prämissen) eine neue Sequenz (Konklusion) herzuleiten.

Permutation:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}(\mathit{Perm\text{-}L}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2}(\mathit{Perm\text{-}R})$$

Kontraktion:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}(\mathit{Contr\text{-}L}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}(\mathit{Contr\text{-}R})$$

Konjunktion:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}(\wedge\text{-}L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}(\wedge\text{-}R)$$

Disjunktion:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}(\vee\text{-}L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}(\vee\text{-}R)$$

Implikation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}(\rightarrow\text{-}L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}(\rightarrow\text{-}R)$$

Negation:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}(\neg\text{-}L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}(\neg\text{-}R)$$

Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x:t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, A \Rightarrow \Delta}(\forall\text{-}L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, A}(\forall\text{-}R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x:y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, A \Rightarrow \Delta}(\exists\text{-}L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, A}(\exists\text{-}R)$$

Bei den Regeln ($\forall$-R) und ($\exists$-L) gilt die Eigenvariablen-Bedingung: die Variable y kommt in der Konklusion nicht vor.