

Logik und Diskrete Strukturen

Kapitel 7: Prädikatenlogik erster Stufe

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

Übersicht

Syntax und Semantik
Beweiskalküle

Sprachen erster Stufe

Eine Sprache $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ erster Stufe ist gegeben durch:

Sprachen erster Stufe

Eine Sprache $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ erster Stufe ist gegeben durch:

- ▶ eine Menge $\mathcal{C}$ von Konstantensymbolen

Sprachen erster Stufe

Eine Sprache $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ erster Stufe ist gegeben durch:

- ▶ eine Menge $\mathcal{C}$ von Konstantensymbolen
- ▶ eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionssymbolen
jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ hat eine Stelligkeit $k = k(f) \in \mathbb{N}$

Sprachen erster Stufe

Eine Sprache $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ erster Stufe ist gegeben durch:

- ▶ eine Menge $\mathcal{C}$ von Konstantensymbolen
- ▶ eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionssymbolen
jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ hat eine Stelligkeit $k = k(f) \in \mathbb{N}$
- ▶ eine Menge $\mathcal{P}$ von Prädikatensymbolen
jedes Prädikatensymbol $P \in \mathcal{P}$ hat eine Stelligkeit $k = k(P) \in \mathbb{N}$

Terme

Sei X eine Menge von Variablen.

Terme der Sprache L sind über X definiert durch:

Terme

Sei X eine Menge von Variablen.

Terme der Sprache L sind über X definiert durch:

- ▶ Jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ist ein Term

Terme

Sei X eine Menge von Variablen.

Terme der Sprache L sind über X definiert durch:

- ▶ Jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ist ein Term
- ▶ Jede Variable $x \in X$ ist ein Term

Terme

Sei X eine Menge von Variablen.

Terme der Sprache L sind über X definiert durch:

- ▶ Jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ist ein Term
- ▶ Jede Variable $x \in X$ ist ein Term
- ▶ Ist $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term

Terme

Sei X eine Menge von Variablen.

Terme der Sprache L sind über X definiert durch:

- ▶ Jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ist ein Term
- ▶ Jede Variable $x \in X$ ist ein Term
- ▶ Ist $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term

Ein Term ist **geschlossen**, wenn er keine Variablen enthält.

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

- Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine **atomare** Formel

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

- ▶ Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine atomare Formel
- ▶ Sind F und G Formeln, dann auch $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ und $F \rightarrow G$

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

- ▶ Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine atomare Formel
- ▶ Sind F und G Formeln, dann auch $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ und $F \rightarrow G$
- ▶ Ist F eine Formel und $x \in X$ eine Variable,
dann sind $\forall x F$ und $\exists x F$ Formeln

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

- ▶ Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine atomare Formel
- ▶ Sind F und G Formeln, dann auch $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ und $F \rightarrow G$
- ▶ Ist F eine Formel und $x \in X$ eine Variable,
dann sind $\forall x F$ und $\exists x F$ Formeln

Ein Quantor $\forall x$ bindet alle Vorkommen der Variablen x in der Formel $\forall x F$.

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

- ▶ Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine atomare Formel
- ▶ Sind F und G Formeln, dann auch $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ und $F \rightarrow G$
- ▶ Ist F eine Formel und $x \in X$ eine Variable,
dann sind $\forall x F$ und $\exists x F$ Formeln

Ein Quantor $\forall x$ bindet alle Vorkommen der Variablen x in der Formel $\forall x F$.

Variablen, die durch keinen Quantor gebunden sind, sind **freie Variable**.

Formeln

Formeln der Sprache L sind definiert durch:

- ▶ Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k ,
und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme,
dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine atomare Formel
- ▶ Sind F und G Formeln, dann auch $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ und $F \rightarrow G$
- ▶ Ist F eine Formel und $x \in X$ eine Variable,
dann sind $\forall x F$ und $\exists x F$ Formeln

Ein Quantor $\forall x$ bindet alle Vorkommen der Variablen x in der Formel $\forall x F$.

Variablen, die durch keinen Quantor gebunden sind, sind freie Variable.

Eine Formel ist **geschlossen**, wenn sie keine freien Variablen enthält.

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term,
dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen
von x durch t ersetzt werden.

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term,
dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen
von x durch t ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

► $(\forall x F)[x := t] = \forall x F$

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

- ▶ $(\forall x F)[x := t] = \forall x F$
- ▶ $(\forall y F)[x := t]$ wird wie folgt definiert:

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

- ▶ $(\forall x F)[x := t] = \forall x F$
- ▶ $(\forall y F)[x := t]$ wird wie folgt definiert:
 - ▶ Umbenennung von y in eine Variable $z \neq x$, die in t nicht vorkommt

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

- ▶ $(\forall x F)[x := t] = \forall x F$
- ▶ $(\forall y F)[x := t]$ wird wie folgt definiert:
 - ▶ Umbenennung von y in eine Variable $z \neq x$, die in t nicht vorkommt
 - ▶ anschließend Ersetzung aller freien Vorkommen von x in F durch t

Substitution

Ist F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, dann bezeichnet $F[x := t]$ die Formel, in der alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

- ▶ $(\forall x F)[x := t] = \forall x F$
- ▶ $(\forall y F)[x := t]$ wird wie folgt definiert:
 - ▶ Umbenennung von y in eine Variable $z \neq x$, die in t nicht vorkommt
 - ▶ anschließend Ersetzung aller freien Vorkommen von x in F durch t
- ▶ Analog für $\exists$

Ende der 11. Vorlesung

Semantik: Interpretation

Eine Interpretation A einer Sprache erster Ordnung $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ besteht aus:

Semantik: Interpretation

Eine Interpretation A einer Sprache erster Ordnung $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ besteht aus:

- ▶ einer nichtleeren Menge $M_A \neq \emptyset$

Semantik: Interpretation

Eine Interpretation A einer Sprache erster Ordnung $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ besteht aus:

- ▶ einer nichtleeren Menge $M_A \neq \emptyset$
- ▶ für jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ein Element $c_A \in M_A$

Semantik: Interpretation

Eine Interpretation A einer Sprache erster Ordnung $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ besteht aus:

- ▶ einer nichtleeren Menge $M_A \neq \emptyset$
- ▶ für jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ein Element $c_A \in M_A$
- ▶ für jedes k -stellige Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ eine Funktion $f_A : (M_A)^k \rightarrow M_A$

Semantik: Interpretation

Eine Interpretation A einer Sprache erster Ordnung $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ besteht aus:

- ▶ einer nichtleeren Menge $M_A \neq \emptyset$
- ▶ für jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{C}$ ein Element $c_A \in M_A$
- ▶ für jedes k -stellige Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ eine Funktion
 $f_A : (M_A)^k \rightarrow M_A$
- ▶ für jedes k -stellige Prädikatensymbol $P \in \mathcal{P}$ eine Relation
 $P_A \subseteq (M_A)^k$

Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion $\eta : X \rightarrow M_A$.

Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion $\eta : X \rightarrow M_A$.

Der Wert $\llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$ eines Terms t in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion $\eta : X \rightarrow M_A$.

Der Wert $\llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$ eines Terms t in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- Für $c \in \mathcal{C}$ ist $\llbracket c \rrbracket_\eta^A = c_A$

Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion $\eta : X \rightarrow M_A$.

Der Wert $\llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$ eines Terms t in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- ▶ Für $c \in \mathcal{C}$ ist $\llbracket c \rrbracket_\eta^A = c_A$
- ▶ Für eine Variable x ist $\llbracket x \rrbracket_\eta^A = \eta(x)$

Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion $\eta : X \rightarrow M_A$.

Der Wert $\llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$ eines Terms t in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- ▶ Für $c \in \mathcal{C}$ ist $\llbracket c \rrbracket_\eta^A = c_A$
- ▶ Für eine Variable x ist $\llbracket x \rrbracket_\eta^A = \eta(x)$
- ▶ Für $f \in \mathcal{F}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist
$$\llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = f_A(\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A)$$

Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion $\eta : X \rightarrow M_A$.

Der Wert $\llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$ eines Terms t in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- ▶ Für $c \in \mathcal{C}$ ist $\llbracket c \rrbracket_\eta^A = c_A$
- ▶ Für eine Variable x ist $\llbracket x \rrbracket_\eta^A = \eta(x)$
- ▶ Für $f \in \mathcal{F}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist
$$\llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = f_A(\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A)$$

Der Wert eines geschlossenen Terms t ist unabhängig von η : schreibe $\llbracket t \rrbracket^A$.

Semantik: Wert einer Formel

Der Wert $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A \in \mathbb{B}$ einer Formel F in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

Semantik: Wert einer Formel

Der Wert $\llbracket F \rrbracket_\eta^A \in \mathbb{B}$ einer Formel F in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

► Für $P \in \mathcal{P}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \in P_A \\ 0 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \notin P_A \end{cases}$$

Semantik: Wert einer Formel

Der Wert $\llbracket F \rrbracket_\eta^A \in \mathbb{B}$ einer Formel F in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- Für $P \in \mathcal{P}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \in P_A \\ 0 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \notin P_A \end{cases}$$

- $\llbracket \neg F \rrbracket_\eta^A = \neg \llbracket F \rrbracket_\eta^A$

Semantik: Wert einer Formel

Der Wert $\llbracket F \rrbracket_\eta^A \in \mathbb{B}$ einer Formel F in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- Für $P \in \mathcal{P}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \in P_A \\ 0 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \notin P_A \end{cases}$$

- $\llbracket \neg F \rrbracket_\eta^A = \neg \llbracket F \rrbracket_\eta^A$
- $\llbracket F \circ G \rrbracket_\eta^A = \llbracket F \rrbracket_\eta^A \circ \llbracket G \rrbracket_\eta^A$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Semantik: Wert einer Formel

Der Wert $\llbracket F \rrbracket_\eta^A \in \mathbb{B}$ einer Formel F in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- Für $P \in \mathcal{P}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \in P_A \\ 0 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \notin P_A \end{cases}$$

- $\llbracket \neg F \rrbracket_\eta^A = \neg \llbracket F \rrbracket_\eta^A$

- $\llbracket F \circ G \rrbracket_\eta^A = \llbracket F \rrbracket_\eta^A \circ \llbracket G \rrbracket_\eta^A$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

- $\llbracket \forall x F \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in M_A \text{ gilt } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Semantik: Wert einer Formel

Der Wert $\llbracket F \rrbracket_\eta^A \in \mathbb{B}$ einer Formel F in einer Interpretation A unter Bewertung η ist rekursiv definiert durch:

- Für $P \in \mathcal{P}$ und Terme $t_1, \dots, t_k$ ist

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \in P_A \\ 0 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \notin P_A \end{cases}$$

- $\llbracket \neg F \rrbracket_\eta^A = \neg \llbracket F \rrbracket_\eta^A$

- $\llbracket F \circ G \rrbracket_\eta^A = \llbracket F \rrbracket_\eta^A \circ \llbracket G \rrbracket_\eta^A$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

- $\llbracket \forall x F \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in M_A \text{ gilt } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $\llbracket \exists x F \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } a \in M_A \text{ gibt mit } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Semantische Eigenschaften

Eine Formel F ist **wahr** in der Interpretation A , geschrieben $A \models F$, wenn $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = 1$ für jede Bewertung η .

Semantische Eigenschaften

Eine Formel F ist wahr in der Interpretation A , geschrieben $A \models F$, wenn $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = 1$ für jede Bewertung η .

In diesem Fall heißt A ein **Modell** von F .

Semantische Eigenschaften

Eine Formel F ist wahr in der Interpretation A , geschrieben $A \models F$, wenn $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = 1$ für jede Bewertung η .

In diesem Fall heißt A ein Modell von F .

Formeln F und G sind **äquivalent**, geschrieben $F \equiv G$, wenn für alle Interpretationen A und alle Bewertungen η gilt $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A$.

Semantische Eigenschaften

Eine Formel F ist wahr in der Interpretation A , geschrieben $A \models F$, wenn $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = 1$ für jede Bewertung η .

In diesem Fall heißt A ein Modell von F .

Formeln F und G sind äquivalent, geschrieben $F \equiv G$, wenn für alle Interpretationen A und alle Bewertungen η gilt $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A$.

Eine Menge T von Formeln **impliziert** F , geschrieben $T \models F$, wenn für jedes A mit $A \models G$ für alle $G \in T$ gilt: $A \models F$.

Semantische Eigenschaften

Eine Formel F ist wahr in der Interpretation A , geschrieben $A \models F$, wenn $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = 1$ für jede Bewertung η .

In diesem Fall heißt A ein Modell von F .

Formeln F und G sind äquivalent, geschrieben $F \equiv G$, wenn für alle Interpretationen A und alle Bewertungen η gilt $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A$.

Eine Menge T von Formeln impliziert F , geschrieben $T \models F$, wenn für jedes A mit $A \models G$ für alle $G \in T$ gilt: $A \models F$.

Eine Formel F ist **allgemeingültig**, wenn $A \models F$ für jede Interpretation A gilt.

Pränex-Normalform

Eine Formel F ist in **Pränex-Normalform**, wenn sie von der Form

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n G$$

ist, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ ist und G keine Quantoren enthält.

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kommt $\rightarrow$ in F nicht vor.

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kommt $\rightarrow$ in F nicht vor.

Der Beweis nutzt die folgenden Äquivalenzen, um die Quantoren an den Anfang der Formel zu ziehen:

- ▶ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- ▶ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$
- ▶ $(\forall x F) \circ G \equiv \forall x (F \circ G)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und x nicht frei in G
- ▶ $(\exists x F) \circ G \equiv \exists x (F \circ G)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und x nicht frei in G

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist.
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist.
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist.
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x F \rrbracket_{\eta}^A = 1 \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist.
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x F \rrbracket_{\eta}^A = 1 \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist.
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x F \rrbracket_{\eta}^A = 1 \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \quad (\text{da } x \text{ nicht frei in } G \text{ ist})$$

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist.
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x F \rrbracket_{\eta}^A = 1 \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \quad (\text{da } x \text{ nicht frei in } G \text{ ist})$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \wedge G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A$$

Pränex-Normalform

Theorem

Für jede Formel F gibt es eine Formel $P(F)$ in Pränex-Normalform mit $P(F) \equiv F$.

Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$, wobei x nicht frei in G ist. Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x F \rrbracket_{\eta}^A = 1 \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \quad (\text{da } x \text{ nicht frei in } G \text{ ist})$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \wedge G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x (F \wedge G) \rrbracket_{\eta}^A = 1.$$



Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$,
und sei $f \notin \mathcal{F}$ ein neues k -stelliges Funktionssymbol, dass wir **Skolem-Funktion** nennen.

Dann gibt es eine Funktion $h : M_A^k \rightarrow M_A$, sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$,
und sei $f \notin \mathcal{F}$ ein neues k -stelliges Funktionssymbol, dass wir Skolem-Funktion nennen.

Dann gibt es eine Funktion $h : M_A^k \rightarrow M_A$, sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist.

Beweis.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$,
und sei $f \notin \mathcal{F}$ ein neues k -stelliges Funktionssymbol, dass wir Skolem-Funktion nennen.

Dann gibt es eine Funktion $h : M_A^k \rightarrow M_A$, sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, und sei $f \notin \mathcal{F}$ ein neues k -stelliges Funktionssymbol, dass wir Skolem-Funktion nennen.

Dann gibt es eine Funktion $h : M_A^k \rightarrow M_A$, sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt: für alle $a \in M_A$ gibt es $b \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, und sei $f \notin \mathcal{F}$ ein neues k -stelliges Funktionssymbol, dass wir Skolem-Funktion nennen.

Dann gibt es eine Funktion $h : M_A^k \rightarrow M_A$, sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt: für alle $a \in M_A$ gibt es $b \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Wir definieren $h : M_A \rightarrow M_A$ als $h(a) :=$ ein beliebiges $b \in M_A$ mit $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$,
und sei $f \notin \mathcal{F}$ ein neues k -stelliges Funktionssymbol, dass wir Skolem-Funktion nennen.

Dann gibt es eine Funktion $h : M_A^k \rightarrow M_A$, sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt: für alle $a \in M_A$ gibt es $b \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Wir definieren $h : M_A \rightarrow M_A$ als $h(a) :=$ ein beliebiges $b \in M_A$ mit $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Somit gilt für alle $a \in M_A$, dass $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^{A'} = 1$,

wobei A' die Erweiterung von A mit $f_{A'} = h$ ist. □

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt $\llbracket \forall x_1 G[y := f(x_1)] \rrbracket^A = 1$.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt $\llbracket \forall x_1 G[y := f(x_1)] \rrbracket^A = 1$.

Also gilt für alle $a \in M_A$, dass $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^A = 1$.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt $\llbracket \forall x_1 G[y := f(x_1)] \rrbracket^A = 1$.

Also gilt für alle $a \in M_A$, dass $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^A = 1$.

Daher gibt es für alle $a \in M_A$ ein $b = \llbracket f(x_1) \rrbracket_{(x_1:=a)}^A \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt $\llbracket \forall x_1 G[y := f(x_1)] \rrbracket^A = 1$.

Also gilt für alle $a \in M_A$, dass $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^A = 1$.

Daher gibt es für alle $a \in M_A$ ein $b = \llbracket f(x_1) \rrbracket_{(x_1:=a)}^A \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Also gibt es für alle $a \in M_A$ ein $b \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^{A'} = 1$.

Skolemisierung

Lemma

Seien eine Interpretation A und G eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$, wobei A' die Beschränkung von A auf die Sprache von F (ohne f) ist.

Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt $\llbracket \forall x_1 G[y := f(x_1)] \rrbracket^A = 1$.

Also gilt für alle $a \in M_A$, dass $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^A = 1$.

Daher gibt es für alle $a \in M_A$ ein $b = \llbracket f(x_1) \rrbracket_{(x_1:=a)}^A \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$.

Also gibt es für alle $a \in M_A$ ein $b \in M_A$, sodass $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^{A'} = 1$.

Somit $\llbracket \forall x \exists y G \rrbracket^{A'} = 1$.



Skolemisierung

Theorem

Für jede geschlossene Formel F gibt es eine Formel F' von der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m G$$

wobei G keine Quantoren enthält, mit der Eigenschaft:

F ist erfüllbar gdw. F' erfüllbar ist

Skolemisierung

Theorem

Für jede geschlossene Formel F gibt es eine Formel F' von der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m G$$

wobei G keine Quantoren enthält, mit der Eigenschaft:

F ist erfüllbar gdw. F' erfüllbar ist

Beweis.

Skolemisierung

Theorem

Für jede geschlossene Formel F gibt es eine Formel F' von der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m G$$

wobei G keine Quantoren enthält, mit der Eigenschaft:

F ist erfüllbar gdw. F' erfüllbar ist

Beweis.

Zur Erinnerung ist die Pränex-Normalform $P(F)$ von F äquivalent zu F .

Sei k die Anzahl der $\exists$ -Quantoren in $P(F)$.

Skolemisierung

Theorem

Für jede geschlossene Formel F gibt es eine Formel F' von der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m G$$

wobei G keine Quantoren enthält, mit der Eigenschaft:

F ist erfüllbar gdw. F' erfüllbar ist

Beweis.

Zur Erinnerung ist die Pränex-Normalform $P(F)$ von F äquivalent zu F .

Sei k die Anzahl der $\exists$ -Quantoren in $P(F)$.

Durch eine k -fache Anwendung der letzten beiden Lemmata können wir die $\exists$ -Quantoren in $P(F)$ durch Skolem-Funktionen ersetzen, ohne die Erfüllbarkeit der Formel zu beeinflussen.

Skolemisierung

Theorem

Für jede geschlossene Formel F gibt es eine Formel F' von der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m G$$

wobei G keine Quantoren enthält, mit der Eigenschaft:

F ist erfüllbar gdw. F' erfüllbar ist

Beweis.

Zur Erinnerung ist die Pränex-Normalform $P(F)$ von F äquivalent zu F .

Sei k die Anzahl der $\exists$ -Quantoren in $P(F)$.

Durch eine k -fache Anwendung der letzten beiden Lemmata können wir die $\exists$ -Quantoren in $P(F)$ durch Skolem-Funktionen ersetzen, ohne die Erfüllbarkeit der Formel zu beeinflussen.

Das Ergebnis hat auch die gewünschte Form. □

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist definiert wie der für die Aussagenlogik.

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist definiert wie der für die Aussagenlogik.

Zusätzliche Regeln für Quantoren:

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist definiert wie der für die Aussagenlogik.

Zusätzliche Regeln für Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} (\forall-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist definiert wie der für die Aussagenlogik.

Zusätzliche Regeln für Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} (\forall-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} (\exists-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist definiert wie der für die Aussagenlogik.

Zusätzliche Regeln für Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} (\forall-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} (\exists-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln $(\forall-R)$ und $(\exists-L)$ gilt die **Eigenvariablen-Bedingung**:
die Variable y darf in der Konklusion nicht vorkommen

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Für die $(\forall\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := y]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Für die $(\forall\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := y]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := y]$ folgt, dass $\llbracket F[x := y] \rrbracket_\eta^A$ für jede Bewertung η .

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Für die $(\forall\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := y]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := y]$ folgt, dass $\llbracket F[x := y] \rrbracket_{\eta}^A$ für jede Bewertung η .

Das heißt, $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=\eta(y)]}^A$ für jede η .

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Für die $(\forall\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := y]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := y]$ folgt, dass $\llbracket F[x := y] \rrbracket_\eta^A$ für jede Bewertung η .

Das heißt, $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=\eta(y)]}^A$ für jede η .

Wegen der Eigenvariablen-Bedingung gilt: Für jede Bewertung η und jedes $a \in M_A$ gibt es eine Bewertung η' mit $\eta'(y) = a$ und $\eta'(z) = \eta(z)$ für alle Variablen z in F .

Sequenzkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Für die $(\forall\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := y]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := y]$ folgt, dass $\llbracket F[x := y] \rrbracket_\eta^A$ für jede Bewertung η .

Das heißt, $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=\eta(y)]}^A$ für jede η .

Wegen der Eigenvariablen-Bedingung gilt: Für jede Bewertung η und jedes $a \in M_A$ gibt es eine Bewertung η' mit $\eta'(y) = a$ und $\eta'(z) = \eta(z)$ für alle Variablen z in F .
Daher gilt $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jedes $a \in M_A$ und jede η .

Sequenzkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln $(\forall\text{-R})$ und $(\exists\text{-R})$.

Für die $(\forall\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := y]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := y]$ folgt, dass $\llbracket F[x := y] \rrbracket_\eta^A$ für jede Bewertung η .

Das heißt, $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=\eta(y)]}^A$ für jede η .

Wegen der Eigenvariablen-Bedingung gilt: Für jede Bewertung η und jedes $a \in M_A$ gibt es eine Bewertung η' mit $\eta'(y) = a$ und $\eta'(z) = \eta(z)$ für alle Variablen z in F .

Daher gilt $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jedes $a \in M_A$ und jede η .

Das heißt, $\llbracket \forall x F \rrbracket_\eta^A$ für jede η .

Sequenzkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis (Fortsetzung).

Für die $(\exists\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := t]$.
Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis (Fortsetzung).

Für die $(\exists\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := t]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := t]$ folgt, dass $\llbracket F[x := t] \rrbracket_\eta^A$ für jede Bewertung η .

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis (Fortsetzung).

Für die $(\exists\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := t]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := t]$ folgt, dass $\llbracket F[x := t] \rrbracket_{\eta}^A$ für jede Bewertung η .

Daher $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jede η , wobei $a = \llbracket t \rrbracket_{\eta}^A \in M_A$.

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis (Fortsetzung).

Für die $(\exists\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := t]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := t]$ folgt, dass $\llbracket F[x := t] \rrbracket_{\eta}^A$ für jede Bewertung η .

Daher $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jede η , wobei $a = \llbracket t \rrbracket_{\eta}^A \in M_A$.

Es gibt also ein $a \in M_A$, sodass $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jede η .

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation A gilt:
erfüllt A die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

Beweis (Fortsetzung).

Für die $(\exists\text{-R})$ -Regel: Der interessante Fall ist, wenn $A \models F[x := t]$.

Wir werden zeigen, dass $A \models \forall x F$.

Aus $A \models F[x := t]$ folgt, dass $\llbracket F[x := t] \rrbracket_\eta^A$ für jede Bewertung η .

Daher $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jede η , wobei $a = \llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$.

Es gibt also ein $a \in M_A$, sodass $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$ für jede η .

Mit anderen Worten: $\llbracket \exists x F \rrbracket_\eta^A$ für jede η .



Sequenzenkalkül: Korrektheit

Theorem

Sei eine Herleitung von S aus den Prämissen $\mathcal{P}$ gegeben.

Dann gilt für jede Interpretation A :

Wenn $A \models P$ für alle $P \in \mathcal{P}$, dann auch $A \models S$.

Sequenzenkalkül: Korrektheit

Theorem

Sei eine Herleitung von S aus den Prämissen $\mathcal{P}$ gegeben.

Dann gilt für jede Interpretation A :

Wenn $A \models P$ für alle $P \in \mathcal{P}$, dann auch $A \models S$.

Beweis.

Wie bei der Aussagenlogik.



Sequenzenkalkül: Korrektheit

Theorem

Sei eine Herleitung von S aus den Prämissen $\mathcal{P}$ gegeben.

Dann gilt für jede Interpretation A :

Wenn $A \models P$ für alle $P \in \mathcal{P}$, dann auch $A \models S$.

Beweis.

Wie bei der Aussagenlogik.



Korollar

Gibt es einen Beweis für $\vdash F$, dann ist F allgemeingültig.

Sequenzenkalkül: Vollständigkeit

Theorem

Ist F allgemeingültig, dann gibt es einen Beweis für $\vdash F$.

Ende der 12. Vorlesung