

# Logik und Diskrete Strukturen

## Kapitel 7: Prädikatenlogik erster Stufe

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

# Übersicht

Syntax und Semantik  
Beweiskalküle

# Sprachen erster Stufe

Eine Sprache  $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  erster Stufe ist gegeben durch:

- ▶ eine Menge  $\mathcal{C}$  von Konstantensymbolen
- ▶ eine Menge  $\mathcal{F}$  von Funktionssymbolen  
jedes Funktionssymbol  $f \in \mathcal{F}$  hat eine Stelligkeit  $k = k(f) \in \mathbb{N}$
- ▶ eine Menge  $\mathcal{P}$  von Prädikatensymbolen  
jedes Prädikatensymbol  $P \in \mathcal{P}$  hat eine Stelligkeit  $k = k(P) \in \mathbb{N}$

# Terme

Sei  $X$  eine Menge von Variablen.

Terme der Sprache  $L$  sind über  $X$  definiert durch:

- ▶ Jedes Konstantensymbol  $c \in \mathcal{C}$  ist ein Term
- ▶ Jede Variable  $x \in X$  ist ein Term
- ▶ Ist  $f \in \mathcal{F}$  ein Funktionssymbol der Stelligkeit  $k$ ,  
und sind  $t_1, \dots, t_k$  Terme,  
dann ist  $f(t_1, \dots, t_k)$  ein Term

Ein Term ist **geschlossen**, wenn er keine Variablen enthält.

# Formeln

Formeln der Sprache  $L$  sind definiert durch:

- ▶ Ist  $P \in \mathcal{P}$  ein Prädikatsymbol der Stelligkeit  $k$ ,  
und sind  $t_1, \dots, t_k$  Terme,  
dann ist  $P(t_1, \dots, t_k)$  eine **atomare** Formel
- ▶ Sind  $F$  und  $G$  Formeln, dann auch  $\neg F$ ,  $F \wedge G$ ,  $F \vee G$  und  $F \rightarrow G$
- ▶ Ist  $F$  eine Formel und  $x \in X$  eine Variable,  
dann sind  $\forall x F$  und  $\exists x F$  Formeln

Ein Quantor  $\forall x$  bindet alle Vorkommen der Variablen  $x$  in der Formel  $\forall x F$ .

Variablen, die durch keinen Quantor gebunden sind, sind **freie Variable**.

Eine Formel ist **geschlossen**, wenn sie keine freien Variablen enthält.

# Substitution

Ist  $F$  eine Formel,  $x$  eine Variable und  $t$  ein Term, dann bezeichnet  $F[x := t]$  die Formel, in der alle freien Vorkommen von  $x$  durch  $t$  ersetzt werden.

Sonderfall in der Definition bei Quantoren:

- ▶  $(\forall x F)[x := t] = \forall x F$
- ▶  $(\forall y F)[x := t]$  wird wie folgt definiert:
  - ▶ Umbenennung von  $y$  in eine Variable  $z \neq x$ , die in  $t$  nicht vorkommt
  - ▶ anschließend Ersetzung aller freien Vorkommen von  $x$  in  $F$  durch  $t$
- ▶ Analog für  $\exists$

Ende der 11. Vorlesung

# Semantik: Interpretation

Eine Interpretation  $A$  einer Sprache erster Ordnung  $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  besteht aus:

- ▶ einer nichtleeren Menge  $M_A \neq \emptyset$
- ▶ für jedes Konstantensymbol  $c \in \mathcal{C}$  ein Element  $c_A \in M_A$
- ▶ für jedes  $k$ -stellige Funktionssymbol  $f \in \mathcal{F}$  eine Funktion  
 $f_A : (M_A)^k \rightarrow M_A$
- ▶ für jedes  $k$ -stellige Prädikatensymbol  $P \in \mathcal{P}$  eine Relation  
 $P_A \subseteq (M_A)^k$

# Semantik: Wert eines Terms

Eine Bewertung ist eine Funktion  $\eta : X \rightarrow M_A$ .

Der Wert  $\llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$  eines Terms  $t$  in einer Interpretation  $A$  unter Bewertung  $\eta$  ist rekursiv definiert durch:

- ▶ Für  $c \in \mathcal{C}$  ist  $\llbracket c \rrbracket_\eta^A = c_A$
- ▶ Für eine Variable  $x$  ist  $\llbracket x \rrbracket_\eta^A = \eta(x)$
- ▶ Für  $f \in \mathcal{F}$  und Terme  $t_1, \dots, t_k$  ist
$$\llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = f_A(\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A)$$

Der Wert eines geschlossenen Terms  $t$  ist unabhängig von  $\eta$ : schreibe  $\llbracket t \rrbracket^A$ .

# Semantik: Wert einer Formel

Der Wert  $\llbracket F \rrbracket_\eta^A \in \mathbb{B}$  einer Formel  $F$  in einer Interpretation  $A$  unter Bewertung  $\eta$  ist rekursiv definiert durch:

- Für  $P \in \mathcal{P}$  und Terme  $t_1, \dots, t_k$  ist

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_k) \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \in P_A \\ 0 & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket_\eta^A, \dots, \llbracket t_k \rrbracket_\eta^A) \notin P_A \end{cases}$$

- $\llbracket \neg F \rrbracket_\eta^A = \neg \llbracket F \rrbracket_\eta^A$

- $\llbracket F \circ G \rrbracket_\eta^A = \llbracket F \rrbracket_\eta^A \circ \llbracket G \rrbracket_\eta^A$  für  $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

- $\llbracket \forall x F \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in M_A \text{ gilt } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $\llbracket \exists x F \rrbracket_\eta^A = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } a \in M_A \text{ gibt mit } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

# Semantische Eigenschaften

Eine Formel  $F$  ist **wahr** in der Interpretation  $A$ , geschrieben  $A \models F$ , wenn  $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = 1$  für jede Bewertung  $\eta$ .

In diesem Fall heißt  $A$  ein **Modell** von  $F$ .

Formeln  $F$  und  $G$  sind **äquivalent**, geschrieben  $F \equiv G$ , wenn für alle Interpretationen  $A$  und alle Bewertungen  $\eta$  gilt  $\llbracket F \rrbracket_{\eta}^A = \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A$ .

Eine Menge  $T$  von Formeln **impliziert**  $F$ , geschrieben  $T \models F$ , wenn für jedes  $A$  mit  $A \models G$  für alle  $G \in T$  gilt:  $A \models F$ .

Eine Formel  $F$  ist **allgemeingültig**, wenn  $A \models F$  für jede Interpretation  $A$  gilt.

# Pränex-Normalform

Eine Formel  $F$  ist in **Pränex-Normalform**, wenn sie von der Form

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n G$$

ist, wobei  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  ist und  $G$  keine Quantoren enthält.

# Pränex-Normalform

## Theorem

Für jede Formel  $F$  gibt es eine Formel  $P(F)$  in Pränex-Normalform mit  $P(F) \equiv F$ .

## Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kommt  $\rightarrow$  in  $F$  nicht vor.

Der Beweis nutzt die folgenden Äquivalenzen, um die Quantoren an den Anfang der Formel zu ziehen:

- ▶  $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- ▶  $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$
- ▶  $(\forall x F) \circ G \equiv \forall x (F \circ G)$  für  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$  und  $x$  nicht frei in  $G$
- ▶  $(\exists x F) \circ G \equiv \exists x (F \circ G)$  für  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$  und  $x$  nicht frei in  $G$

# Pränex-Normalform

## Theorem

Für jede Formel  $F$  gibt es eine Formel  $P(F)$  in Pränex-Normalform mit  $P(F) \equiv F$ .

## Beweis (Fortsetzung).

Als Beispiel beweisen wir, dass  $(\forall x F) \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$ , wobei  $x$  nicht frei in  $G$  ist.  
Die Beweise für die anderen Äquivalenzen sind analog.

$$\llbracket (\forall x F) \wedge G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x F \rrbracket_{\eta}^A = 1 \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta}^A = 1$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A \text{ und } \llbracket G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \quad (\text{da } x \text{ nicht frei in } G \text{ ist})$$

$$\text{gdw. } \llbracket F \wedge G \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A = 1 \text{ für alle } a \in M_A$$

$$\text{gdw. } \llbracket \forall x (F \wedge G) \rrbracket_{\eta}^A = 1.$$



# Skolemisierung

## Lemma

Seien eine Interpretation  $A$  und  $G$  eine Formel, sodass gilt  $A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$ ,  
und sei  $f \notin \mathcal{F}$  ein neues  $k$ -stelliges Funktionssymbol, dass wir **Skolem-Funktion** nennen.

Dann gibt es eine Funktion  $h : M_A^k \rightarrow M_A$ , sodass

$$A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

wobei  $A'$  die Erweiterung von  $A$  mit  $f_{A'} = h$  ist.

## Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall  $k = 1$ . Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt: für alle  $a \in M_A$  gibt es  $b \in M_A$ , sodass  $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$ .

Wir definieren  $h : M_A \rightarrow M_A$  als  $h(a) :=$  ein beliebiges  $b \in M_A$  mit  $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$ .

Somit gilt für alle  $a \in M_A$ , dass  $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^{A'} = 1$ ,

wobei  $A'$  die Erweiterung von  $A$  mit  $f_{A'} = h$  ist. □

# Skolemisierung

## Lemma

Seien eine Interpretation  $A$  und  $G$  eine Formel, sodass gilt

$$A \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k G[y := f(x_1, \dots, x_k)]$$

Dann gilt  $A' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists y G$ , wobei  $A'$  die Beschränkung von  $A$  auf die Sprache von  $F$  (ohne  $f$ ) ist.

## Beweis.

Wir fokussieren uns auf den Fall  $k = 1$ . Der allgemeine Fall ist analog.

Aus der Annahme folgt  $\llbracket \forall x_1 G[y := f(x_1)] \rrbracket^A = 1$ .

Also gilt für alle  $a \in M_A$ , dass  $\llbracket G[y := f(x_1)] \rrbracket_{(x_1:=a)}^A = 1$ .

Daher gibt es für alle  $a \in M_A$  ein  $b = \llbracket f(x_1) \rrbracket_{(x_1:=a)}^A \in M_A$ , sodass  $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^A = 1$ .

Also gibt es für alle  $a \in M_A$  ein  $b \in M_A$ , sodass  $\llbracket G \rrbracket_{(x_1:=a, y:=b)}^{A'} = 1$ .

Somit  $\llbracket \forall x \exists y G \rrbracket^{A'} = 1$ .



# Skolemisierung

## Theorem

*Für jede geschlossene Formel  $F$  gibt es eine Formel  $F'$  von der Form*

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m G$$

*wobei  $G$  keine Quantoren enthält, mit der Eigenschaft:*

*$F$  ist erfüllbar gdw.  $F'$  erfüllbar ist*

## Beweis.

Zur Erinnerung ist die Pränex-Normalform  $P(F)$  von  $F$  äquivalent zu  $F$ .

Sei  $k$  die Anzahl der  $\exists$ -Quantoren in  $P(F)$ .

Durch eine  $k$ -fache Anwendung der letzten beiden Lemmata können wir die  $\exists$ -Quantoren in  $P(F)$  durch Skolem-Funktionen ersetzen, ohne die Erfüllbarkeit der Formel zu beeinflussen.

Das Ergebnis hat auch die gewünschte Form. □

# Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik ist definiert wie der für die Aussagenlogik.

Zusätzliche Regeln für Quantoren:

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} (\forall-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} (\forall-R)$$

$$\frac{\Gamma, A[x := y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} (\exists-L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x := t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A} (\exists-R)$$

Bei den Regeln  $(\forall-R)$  und  $(\exists-L)$  gilt die **Eigenvariablen-Bedingung**:  
die Variable  $y$  darf in der Konklusion nicht vorkommen

# Sequenzkalkül: Korrektheit

## Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation  $A$  gilt:  
erfüllt  $A$  die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

## Beweis.

Wir beschränken uns auf die Regeln  $(\forall\text{-R})$  und  $(\exists\text{-R})$ .

**Für die  $(\forall\text{-R})$ -Regel:** Der interessante Fall ist, wenn  $A \models F[x := y]$ .

Wir werden zeigen, dass  $A \models \forall x F$ .

Aus  $A \models F[x := y]$  folgt, dass  $\llbracket F[x := y] \rrbracket_\eta^A$  für jede Bewertung  $\eta$ .

Das heißt,  $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=\eta(y)]}^A$  für jede  $\eta$ .

Wegen der Eigenvariablen-Bedingung gilt: Für jede Bewertung  $\eta$  und jedes  $a \in M_A$  gibt es eine Bewertung  $\eta'$  mit  $\eta'(y) = a$  und  $\eta'(z) = \eta(z)$  für alle Variablen  $z$  in  $F$ .

Daher gilt  $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$  für jedes  $a \in M_A$  und jede  $\eta$ .

Das heißt,  $\llbracket \forall x F \rrbracket_\eta^A$  für jede  $\eta$ .

# Sequenzenkalkül: Korrektheit

## Lemma

*Für jede Schlussregel und jede Interpretation  $A$  gilt:  
erfüllt  $A$  die Prämissen der Regel, dann auch die Konklusion.*

## Beweis (Fortsetzung).

**Für die  $(\exists\text{-R})$ -Regel:** Der interessante Fall ist, wenn  $A \models F[x := t]$ .

Wir werden zeigen, dass  $A \models \forall x F$ .

Aus  $A \models F[x := t]$  folgt, dass  $\llbracket F[x := t] \rrbracket_\eta^A$  für jede Bewertung  $\eta$ .

Daher  $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$  für jede  $\eta$ , wobei  $a = \llbracket t \rrbracket_\eta^A \in M_A$ .

Es gibt also ein  $a \in M_A$ , sodass  $\llbracket F \rrbracket_{\eta[x:=a]}^A$  für jede  $\eta$ .

Mit anderen Worten:  $\llbracket \exists x F \rrbracket_\eta^A$  für jede  $\eta$ .



# Sequenzenkalkül: Korrektheit

## Theorem

*Sei eine Herleitung von  $S$  aus den Prämissen  $\mathcal{P}$  gegeben.*

*Dann gilt für jede Interpretation  $A$ :*

*Wenn  $A \models P$  für alle  $P \in \mathcal{P}$ , dann auch  $A \models S$ .*

## Beweis.

Wie bei der Aussagenlogik.



## Korollar

Gibt es einen Beweis für  $\vdash F$ , dann ist  $F$  allgemeingültig.

# Sequenzenkalkül: Vollständigkeit

## Theorem

*Ist  $F$  allgemeingültig, dann gibt es einen Beweis für  $\vdash F$ .*

Ende der 12. Vorlesung