Logik und Diskrete Strukturen
Kapitel 5: Kombinatorik

Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

Übersicht

Ziehen von Elementen aus einer Menge
Das Schubfachprinzip

Ziehen von Elementen aus einer Menge

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen?

Zwei Unterscheidungen:

- mit oder ohne Zurücklegen, d.h. sind Wiederholungen möglich?
- geordnet oder ungeordnet, d.h. spielt die Reihenfolge eine Rolle?

$\rightsquigarrow$ 4 verschiedene Zählprobleme

Ziehen von Elementen aus einer Menge – Beispiel

Beispiel: Ziehen von $k = 2$ Elementen aus $\{1, 2, 3\}$, also $n = 3$

- Geordnet, mit Zurücklegen – 9 Möglichkeiten:
  $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$
- Geordnet, ohne Zurücklegen – 6 Möglichkeiten:
  $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$
- Ungeordnet, mit Zurücklegen – 6 Möglichkeiten:
  $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 3\}$
- Ungeordnet, ohne Zurücklegen – 3 Möglichkeiten:
  $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

Ziehen von Elementen aus einer Menge – Anzahlformeln

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen?

- Geordnet, mit Zurücklegen:
  k-mal Ziehen, jedesmal n Möglichkeiten
  $\leadsto$ insgesamt n^k
- Geordnet, ohne Zurücklegen:
  k-mal Ziehen, Anzahl Möglichkeiten nimmt jedesmal um 1 ab
  $\leadsto$ insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$
- Ungeordnet, ohne Zurücklegen:
  wie oben, aber jede Auswahl wird dort $k!$ mal gezählt
  $\leadsto$ insgesamt $\big(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\big)/k! = n!/(n-k)!k! = \binom{n}{k}$

Die Zahlen $\binom{n}{k} = n!/(n-k)!k!$ für $k, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ heißen Binomialkoeffizienten.

Ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen

Auswahl ist gegeben durch ein n-Tupel von Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$.

a_i gibt an, wie häufig das Element i gezogen wurde.

So ein Tupel wird kodiert als String aus $*$ und $|$:

- Zahl i kodiert als Folge von i mal $*$
- Zahlen im Tupel getrennt durch $|$

Beispiel mit $n = 5, k = 3$:
$\{1, 4, 4\}$ entspricht $(1, 0, 0, 2, 0)$, kodiert als $* \,|||\, ** \,|$

Gesucht: Anzahl solcher Strings der Länge $n + k - 1$ und k mal $*$

Diese ist $\binom{n+k-1}{k}$.

Binomialkoeffizienten

Binomialkoeffizienten heißen so wegen der binomischen Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Korollar:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Eigenschaften von Binomialkoeffizienten

Rekursionsgleichung (Pascalsches Dreieck):

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{für } k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

Symmetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Andere Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Das Schubfachprinzip

Verteilt man n Elemente auf $m < n$ Fächer, so gibt es ein Fach,
dass mindestens 2 Elemente enthält.

Theorem

Ist $f : A \to B$ eine Funktion und $|A| > |B|$, so gibt es ein $b \in B$ mit $\left|f^{-1}(b)\right| \geq 2$.

In anderen Worten gibt es keine injektive Funktion $f : A \to B$, wenn $|A| > |B|$.

Anwendung des Schubfachprinzips

Lemma

In jeder Gruppe P von Personen gibt es zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Personen in P kennen. (Wir gehen davon aus, dass „kennen“ symmetrisch ist.)

Beweis.

Sei $n = |P|$. Wir definieren $f : P \to \{0, \ldots, n-1\}$ mit $f(p) = |\{q \in P \mid p \text{ kennt } q\}|$.
Das Schubfachprinzip ist nicht direkt anwendbar, weil $|P| = n = |\{0, \ldots, n-1\}|$.

Lösung: Fallunterscheidung.

- Fall 1: Es gibt $p_0 \in P$ mit $f(p_0) = 0$. Dann ist $f : P \to \{0, \ldots, n-2\}$.
  Das Schubfachprinzip ergibt p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ und $f(p_1) = f(p_2)$.
- Fall 2: Es gibt kein $p_0 \in P$ mit $f(p_0) = 0$. Dann ist $f : P \to \{1, \ldots, n-1\}$.
  Das Schubfachprinzip ist auch hier anwendbar.

$\square$

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Theorem

Ist $f : A \to B$ eine Funktion, so gibt es ein $b \in B$ mit

$$\left|f^{-1}(b)\right| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$$

Beweis (durch Widerspruch).

Wir nehmen an, dass $|f^{-1}(b)| < \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ für alle $b \in B$.

Das heißt, $|f^{-1}(b)| < \frac{|A|}{|B|}$.

Daher $|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| < |B| \cdot \frac{|A|}{|B|} = |A|$. Widerspruch. $\square$

Anwendung des verallgemeinerten Schubfachprinzips

Lemma

In jeder Gruppe von sechs Personen gibt es drei Personen, die sich alle gegenseitig kennen oder alle gegenseitig nicht kennen.

Beweis.

Sei $P = \{p_1, \dots, p_6\}$ mit $|P| = 6$.

Wir nehmen p_1 heraus. Sei $f : \{p_2, \dots, p_6\} \to \{0, 1\}$ mit $f(p_i) = \begin{cases} 1 & p_i \text{ kennt } p_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Da $|\{p_2, \dots, p_6\}| = 5$ und $|\{0, 1\}| = 2$, liefert das verallgemeinerte Schubfachprinzip, dass es $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ Elemente p_i gibt, sodass $f(p_i) = 1$ oder $f(p_i) = 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f(p_2) = f(p_3) = f(p_4) = 1$.

- Fall 1: Es gibt $i, j \in \{2, 3, 4\}$, sodass $i \neq j$ und p_i p_j kennt. Dann kennen sich p_1, p_i, p_j.
- Fall 2: Sonst kennen sich p_2, p_3, p_4 nicht.

$\square$

Ende der 8. Vorlesung