Logik und Diskrete Strukturen
Kapitel 2: Ordnungen und Verbände

Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

Übersicht

Partielle Ordnungen
Verbände

Transitive Hülle

Relation R auf A

$\rightsquigarrow$ transitive Hülle R^+

$a\ R^+\ b$ gdw. es gibt $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit

- $a\ R\ x_1$
- $x_i\ R\ x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$
- $x_k\ R\ b$.

Transitive Hülle

Relation R auf A

$\rightsquigarrow$ transitive Hülle R^+

$a \; R^+ \; b$ gdw. es gibt $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit

- $a \; R \; x_1$
- $x_i \; R \; x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$
- $x_k \; R \; b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Transitive Hülle

Relation R auf A

$\rightsquigarrow$ transitive Hülle R^+

$a \; R^+ \; b$ gdw. es gibt $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit

- $a \; R \; x_1$
- $x_i \; R \; x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$
- $x_k \; R \; b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Ist $R' \supseteq R$ transitiv, dann ist $R' \supseteq R^+$.

Transitive Hülle

Relation R auf A

$\rightsquigarrow$ transitive Hülle R^+

$a \; R^+ \; b$ gdw. es gibt $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit

- $a \; R \; x_1$
- $x_i \; R \; x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$
- $x_k \; R \; b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Ist $R' \supseteq R$ transitiv, dann ist $R' \supseteq R^+$.

Alternative Definition:

R^+ ist die minimale transitive Relation $R' \supseteq R$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* \;:=\; R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* \;:=\; R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* \;:=\; R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* \;:=\; R^+ \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

R ist azyklisch, wenn es keine $a_1, \ldots, a_k \in A$ $(k \geq 1)$ gibt, mit

$$a_1 \; R \; a_2 \;\wedge\; a_2 \; R \; a_3 \;\wedge \cdots \wedge\; a_{k-1} \; R \; a_k \;\wedge\; a_k \; R \; a_1$$

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* \;:=\; R^+ \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

R ist azyklisch, wenn es keine $a_1, \ldots, a_k \in A$ $(k \geq 1)$ gibt, mit

$$a_1 \; R \; a_2 \;\wedge\; a_2 \; R \; a_3 \;\wedge \cdots \wedge\; a_{k-1} \; R \; a_k \;\wedge\; a_k \; R \; a_1$$

Ist R azyklisch, so ist R^* eine partielle Ordnung.

Minimale und Maximale Elemente

Sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf A.

- $a \in A$ heißt maximales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.

Minimale und Maximale Elemente

Sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf A.

- $a \in A$ heißt maximales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.

- $a \in A$ heißt minimales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.

Minimale und Maximale Elemente

Sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf A.

- $a \in A$ heißt maximales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- $a \in A$ heißt minimales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- $a \in A$ heißt größtes Element oder Maximum,
  falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.

Minimale und Maximale Elemente

Sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf A.

- $a \in A$ heißt maximales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- $a \in A$ heißt minimales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- $a \in A$ heißt größtes Element oder Maximum,
  falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.
- $a \in A$ heißt kleinstes Element oder Minimum,
  falls $a \preceq y$ für alle $y \in A$ gilt.

Minimale und Maximale Elemente

Sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf A.

- $a \in A$ heißt maximales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- $a \in A$ heißt minimales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- $a \in A$ heißt größtes Element oder Maximum,
  falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.
- $a \in A$ heißt kleinstes Element oder Minimum,
  falls $a \preceq y$ für alle $y \in A$ gilt.

Kleinstes und größtes Element sind eindeutig, wenn sie existieren.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung $\preceq$ auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung,
wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung $\preceq$ auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung,
wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: $\leq$ auf $\mathbb{N}$.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung $\preceq$ auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung,
wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: $\leq$ auf $\mathbb{N}$.

Ordnung $\leq$ ist eine lineare Erweiterung von $\preceq$, wenn gilt:

- $\leq$ ist lineare Ordnung auf A
- für alle $a, b \in A$ gilt: ist $a \preceq b$, dann auch $a \leq b$

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung $\preceq$ auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung,
wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: $\leq$ auf $\mathbb{N}$.

Ordnung $\leq$ ist eine lineare Erweiterung von $\preceq$, wenn gilt:

- $\leq$ ist lineare Ordnung auf A
- für alle $a, b \in A$ gilt: ist $a \preceq b$, dann auch $a \leq b$

Beispiel: $\leq$ ist eine lineare Erweiterung von $|$ auf $\mathbb{N}$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.
  Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.
  Sei $A' := A \setminus \{a\}$.
  Sei $\preceq'$ die Einschränkung von $\preceq$ auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).
  Offensichtlich ist $\preceq'$ eine partielle Ordnung auf A'.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.
  Sei $A' := A \setminus \{a\}$.
  Sei $\preceq'$ die Einschränkung von $\preceq$ auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).
  Offensichtlich ist $\preceq'$ eine partielle Ordnung auf A'.
  Nach der Induktionshypothese hat $\preceq'$ eine lineare Erweiterung $\leq'$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.
  Sei $A' := A \setminus \{a\}$.
  Sei $\preceq'$ die Einschränkung von $\preceq$ auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).
  Offensichtlich ist $\preceq'$ eine partielle Ordnung auf A'.
  Nach der Induktionshypothese hat $\preceq'$ eine lineare Erweiterung $\leq'$.
  Wir erweitern $\leq'$ durch a als größtes Element: $\leq := \leq' \cup \{(x, a) \mid x \in A'\}$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.
  Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

  Sei $\preceq'$ die Einschränkung von $\preceq$ auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).
  Offensichtlich ist $\preceq'$ eine partielle Ordnung auf A'.
  Nach der Induktionshypothese hat $\preceq'$ eine lineare Erweiterung $\leq'$.

  Wir erweitern $\leq'$ durch a als größtes Element: $\leq := \leq' \cup \{(x, a) \mid x \in A'\}$.
  Dann ist $\leq$ eine lineare Ordnung auf A. $\square$

Infimum und Supremum

Sei $\preceq$ partielle Ordnung auf A, und $a, b \in A$.

- $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b, falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.

Infimum und Supremum

Sei $\preceq$ partielle Ordnung auf A, und $a, b \in A$.

- $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b,
  falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b,
  falls x obere Schranke von a und b ist,
  und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.

Infimum und Supremum

Sei $\preceq$ partielle Ordnung auf A, und $a, b \in A$.

- $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b,
  falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b,
  falls x obere Schranke von a und b ist,
  und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- $x \in A$ heißt untere Schranke von a und b,
  falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.

Infimum und Supremum

Sei $\preceq$ partielle Ordnung auf A, und $a, b \in A$.

- $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b,
  falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b,
  falls x obere Schranke von a und b ist,
  und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- $x \in A$ heißt untere Schranke von a und b,
  falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.
- $x \in A$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von a und b,
  falls x untere Schranke von a und b ist,
  und für jede untere Schranke y von a und b gilt $y \preceq x$.

Infimum und Supremum

Sei $\preceq$ partielle Ordnung auf A, und $a, b \in A$.

- $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b,
  falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b,
  falls x obere Schranke von a und b ist,
  und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- $x \in A$ heißt untere Schranke von a und b,
  falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.
- $x \in A$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von a und b,
  falls x untere Schranke von a und b ist,
  und für jede untere Schranke y von a und b gilt $y \preceq x$.

Infimum und Supremum sind eindeutig, wenn sie existieren.

Ende der 3. Vorlesung

Verbände

Eine Menge A mit partieller Ordnung $\preceq$ ist ein Verband,
wenn es für je zwei a, b ein Infimum und Supremum gibt.

Verbände

Eine Menge A mit partieller Ordnung $\preceq$ ist ein Verband,
wenn es für je zwei a, b ein Infimum und Supremum gibt.

Beispiel 1: Potenzmengenverband

$\mathcal{P}(M)$ mit der Ordnung $\subseteq$

$A \cup B$ ist das Supremum, und $A \cap B$ das Infimum von A und B.

Kleinstes Element ist $\emptyset$, größtes Element ist M.

Verbände

Eine Menge A mit partieller Ordnung $\preceq$ ist ein Verband,
wenn es für je zwei a, b ein Infimum und Supremum gibt.

Beispiel 1: Potenzmengenverband

$\mathcal{P}(M)$ mit der Ordnung $\subseteq$

$A \cup B$ ist das Supremum, und $A \cap B$ das Infimum von A und B.

Kleinstes Element ist $\emptyset$, größtes Element ist M.

Beispiel 2: Teilerverband

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid n\}$ mit der Ordnung $\mid$ (Teilbarkeit)

$ggT(x, y)$ (größter gemeinsamer Teiler) ist das Infimum von x und y und
$kgV(x, y)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches) ist das Supremum von x und y.

Kleinstes Element ist 1, größtes Element ist n.

Beispiel 3: Partitionsverband

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Partitionen einer Menge M.

Beispiel 3: Partitionsverband

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Partitionen einer Menge M.

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n \ \exists j \leq m \ \ A_i \subseteq B_j$$

Beispiel 3: Partitionsverband

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Partitionen einer Menge M.

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n \ \exists j \leq m \ \ A_i \subseteq B_j$$

$Part(M)$ ist die Menge aller Partitionen von M.

Beispiel 3: Partitionsverband

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Partitionen einer Menge M.

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n \ \exists j \leq m \ \ A_i \subseteq B_j$$

$Part(M)$ ist die Menge aller Partitionen von M.

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation $\preceq$ bildet einen Verband.

Beispiel 3: Partitionsverband

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Partitionen einer Menge M.

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n \ \exists j \leq m \ \ A_i \subseteq B_j$$

$Part(M)$ ist die Menge aller Partitionen von M.

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation $\preceq$ bildet einen Verband.

Bemerkung: die Zahlen $B_n = |Part([n])|$ heißen Bell-Zahlen.

Es gilt: $B_0 = B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5, \quad B_4 = 15, \quad B_5 = 52, \ldots$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

- Assoziativität
  $$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

- Assoziativität
  $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- Kommutativität
  $a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

- Assoziativität
  $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- Kommutativität
  $a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$
- $a \sqsubseteq b \quad \text{gdw.} \quad a \sqcap b = a \quad \text{gdw.} \quad a \sqcup b = b$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

- Assoziativität
  $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- Kommutativität
  $a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$
- $a \sqsubseteq b \quad \text{gdw.} \quad a \sqcap b = a \quad \text{gdw.} \quad a \sqcup b = b$
- Absorption
  $a \sqcup (a \sqcap b) = a \quad \text{und} \quad a \sqcap (a \sqcup b) = a$

Distributive Verbände

Ein Verband ist distributiv, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$
$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Distributive Verbände

Ein Verband ist distributiv, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$
$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilerverband sind distributiv.

Distributive Verbände

Ein Verband ist distributiv, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$
$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilerverband sind distributiv.

Theorem

Es gibt Verbände, die nicht distributiv sind.

Distributive Verbände

Ein Verband ist distributiv, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$
$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilerverband sind distributiv.

Theorem

Es gibt Verbände, die nicht distributiv sind.

Z.B. ist $P_3 := Part([3])$ nicht distributiv.