

Logik und Diskrete Strukturen

Kapitel 2: Ordnungen und Verbände

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

Übersicht

Partielle Ordnungen
Verbände

Transitive Hülle

Relation R auf A

\rightsquigarrow **transitive Hülle** R^+

$a R^+ b$ gdw. $a R b$ oder es gibt $x_1, \dots, x_k \in A$ ($k \geq 1$) mit

- ▶ $a R x_1$
- ▶ $x_i R x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- ▶ $x_k R b$.

Transitive Hülle

Relation R auf A

\rightsquigarrow transitive Hülle R^+

$a R^+ b$ gdw. $a R b$ oder es gibt $x_1, \dots, x_k \in A$ ($k \geq 1$) mit

- ▶ $a R x_1$
- ▶ $x_i R x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- ▶ $x_k R b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Transitive Hülle

Relation R auf A

\rightsquigarrow transitive Hülle R^+

$a R^+ b$ gdw. $a R b$ oder es gibt $x_1, \dots, x_k \in A$ ($k \geq 1$) mit

- ▶ $a R x_1$
- ▶ $x_i R x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- ▶ $x_k R b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Ist $R' \supseteq R$ transitiv, dann ist $R' \supseteq R^+$.

Transitive Hülle

Relation R auf A

\rightsquigarrow transitive Hülle R^+

$a R^+ b$ gdw. $a R b$ oder es gibt $x_1, \dots, x_k \in A$ ($k \geq 1$) mit

- ▶ $a R x_1$
- ▶ $x_i R x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- ▶ $x_k R b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Ist $R' \supseteq R$ transitiv, dann ist $R' \supseteq R^+$.

Alternative Definition:

R^+ ist die minimale transitive Relation $R' \supseteq R$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* := R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* := R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* := R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* := R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

R ist **azyklisch**, wenn es keine $a_1, \dots, a_k \in A$ ($k \geq 1$) gibt, mit

$$a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \wedge \dots \wedge a_{k-1} R a_k \wedge a_k R a_1$$

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* := R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

R ist azyklisch, wenn es keine $a_1, \dots, a_k \in A$ ($k \geq 1$) gibt, mit

$$a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \wedge \dots \wedge a_{k-1} R a_k \wedge a_k R a_1$$

Ist R azyklisch, so ist R^* eine partielle Ordnung.

Minimale und Maximale Elemente

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A .

- ▶ $a \in A$ heißt **maximales Element**, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.

Minimale und Maximale Elemente

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A .

- ▶ $a \in A$ heißt maximales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- ▶ $a \in A$ heißt **minimales Element**, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.

Minimale und Maximale Elemente

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A .

- ▶ $a \in A$ heißt maximales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- ▶ $a \in A$ heißt minimales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- ▶ $a \in A$ heißt **größtes Element** oder **Maximum**, falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.

Minimale und Maximale Elemente

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A .

- ▶ $a \in A$ heißt maximales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- ▶ $a \in A$ heißt minimales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- ▶ $a \in A$ heißt größtes Element oder Maximum, falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.
- ▶ $a \in A$ heißt kleinstes Element oder Minimum, falls $a \preceq y$ für alle $y \in A$ gilt.

Minimale und Maximale Elemente

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A .

- ▶ $a \in A$ heißt maximales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- ▶ $a \in A$ heißt minimales Element, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- ▶ $a \in A$ heißt größtes Element oder Maximum, falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.
- ▶ $a \in A$ heißt kleinstes Element oder Minimum, falls $a \preceq y$ für alle $y \in A$ gilt.

Maximum und Minimum sind eindeutig, wenn sie existieren.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung \preceq auf A ist eine **lineare** (oder totale) Ordnung, wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung \preceq auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung, wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: \leq auf \mathbb{N} .

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung \preceq auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung, wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: \leq auf \mathbb{N} .

Ordnung \leq ist eine **lineare Erweiterung** von \preceq , wenn gilt:

- ▶ \leq ist lineare Ordnung auf A
- ▶ für alle $a, b \in A$ gilt: ist $a \preceq b$, dann auch $a \leq b$

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung \preceq auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung, wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: \leq auf \mathbb{N} .

Ordnung \leq ist eine lineare Erweiterung von \preceq , wenn gilt:

- ▶ \leq ist lineare Ordnung auf A
- ▶ für alle $a, b \in A$ gilt: ist $a \preceq b$, dann auch $a \leq b$

Beispiel: \leq ist eine lineare Erweiterung von $|$ auf \mathbb{N} .

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- ▶ **Induktionsanfang:** $|A| = 0$. Trivial.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- ▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- ▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- ▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- ▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.
Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- ▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- ▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.
Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .
Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- ▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- ▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.
Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .
Sei $A' := A \setminus \{a\}$.
Sei \preceq' die Einschränkung von \preceq auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).
Offensichtlich ist \preceq' eine partielle Ordnung auf A' .

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.

▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.

Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .

Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

Sei \preceq' die Einschränkung von \preceq auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).

Offensichtlich ist \preceq' eine partielle Ordnung auf A' .

Nach der Induktionshypothese hat \preceq' eine lineare Erweiterung \leq' .

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.

▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.

Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .

Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

Sei \preceq' die Einschränkung von \preceq auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).

Offensichtlich ist \preceq' eine partielle Ordnung auf A' .

Nach der Induktionshypothese hat \preceq' eine lineare Erweiterung \leq' .

Wir erweitern \leq' durch a als größtes Element: $\leq := \leq' \cup \{(x, a) \mid x \in A'\}$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

▶ Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.

▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.

Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .

Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

Sei \preceq' die Einschränkung von \preceq auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).

Offensichtlich ist \preceq' eine partielle Ordnung auf A' .

Nach der Induktionshypothese hat \preceq' eine lineare Erweiterung \leq' .

Wir erweitern \leq' durch a als größtes Element: $\leq := \leq' \cup \{(x, a) \mid x \in A'\}$.

Dann ist \leq eine lineare Ordnung auf A .



Ende der 3. Vorlesung

Infimum und Supremum

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A , und $a, b \in A$.

- ▶ $x \in A$ heißt **obere Schranke** von a und b , falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.

Infimum und Supremum

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A , und $a, b \in A$.

- ▶ $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b , falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von a und b , falls x obere Schranke von a und b ist, und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.

Infimum und Supremum

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A , und $a, b \in A$.

- ▶ $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b , falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b , falls x obere Schranke von a und b ist, und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- ▶ $x \in A$ heißt **untere Schranke** von a und b , falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.

Infimum und Supremum

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A , und $a, b \in A$.

- ▶ $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b , falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b , falls x obere Schranke von a und b ist, und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- ▶ $x \in A$ heißt untere Schranke von a und b , falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von a und b , falls x untere Schranke von a und b ist, und für jede untere Schranke y von a und b gilt $y \preceq x$.

Infimum und Supremum

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A , und $a, b \in A$.

- ▶ $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b , falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b , falls x obere Schranke von a und b ist, und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- ▶ $x \in A$ heißt untere Schranke von a und b , falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von a und b , falls x untere Schranke von a und b ist, und für jede untere Schranke y von a und b gilt $y \preceq x$.

Infimum und Supremum sind eindeutig, wenn sie existieren.

Verbände

Eine Menge A mit partieller Ordnung \preceq ist ein **Verband**,
wenn es für je zwei a, b ein Infimum und ein Supremum gibt.

Beispiel 1: Potenzmengenverband

$\mathcal{P}(M)$ mit der Ordnung \subseteq (Teilmenge)

$A \cup B$ ist das Supremum von A und B und
 $A \cap B$ das Infimum von A und B .

Kleinstes Element ist \emptyset , größtes Element ist M .

Beispiel 2: Teilerverband

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid n\}$ mit der Ordnung \mid (Teilbarkeit)

$ggT(x, y)$ (größter gemeinsamer Teiler) ist das Infimum von x und y und
 $kgV(x, y)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches) ist das Supremum von x und y .

Kleinstes Element ist 1, größtes Element ist n .

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $\text{Part}(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $Part(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ auf $Part(M)$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n, \exists j \leq m, A_i \subseteq B_j$$

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $Part(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ auf $Part(M)$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n, \exists j \leq m, A_i \subseteq B_j$$

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation \preceq bildet einen Verband.

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $Part(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ auf $Part(M)$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n, \exists j \leq m, A_i \subseteq B_j$$

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation \preceq bildet einen Verband.

Infimum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : $\{A_i \cap B_j \mid i, j \leq n, A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ oder Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{A}} \cap \sim_{\mathcal{B}}$

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $Part(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ auf $Part(M)$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n, \exists j \leq m, A_i \subseteq B_j$$

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation \preceq bildet einen Verband.

Infimum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : $\{A_i \cap B_j \mid i, j \leq n, A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ oder Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{A}} \cap \sim_{\mathcal{B}}$

Supremum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : Äquivalenzklassen von $(\sim_{\mathcal{A}} \cup \sim_{\mathcal{B}})^+$

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $Part(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ auf $Part(M)$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n, \exists j \leq m, A_i \subseteq B_j$$

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation \preceq bildet einen Verband.

Infimum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : $\{A_i \cap B_j \mid i, j \leq n, A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ oder Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{A}} \cap \sim_{\mathcal{B}}$

Supremum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : Äquivalenzklassen von $(\sim_{\mathcal{A}} \cup \sim_{\mathcal{B}})^+$

Bemerkung: die Zahlen $B_n = |Part([n])|$ heißen **Bell-Zahlen**.

Es gilt: $B_0 = B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$, ...

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

► Assoziativität

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

▶ Assoziativität

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

▶ Kommutativität

$$a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

▶ Assoziativität

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

▶ Kommutativität

$$a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$$

▶ $a \sqsubseteq b$ gdw. $a \sqcap b = a$ gdw. $a \sqcup b = b$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

▶ Assoziativität

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

▶ Kommutativität

$$a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$$

▶ $a \sqsubseteq b$ gdw. $a \sqcap b = a$ gdw. $a \sqcup b = b$

▶ Absorption

$$a \sqcup (a \sqcap b) = a \quad \text{und} \quad a \sqcap (a \sqcup b) = a$$

Distributive Verbände

Ein Verband ist **distributiv**, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Distributive Verbände

Ein Verband ist **distributiv**, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilverband sind distributiv.

Distributive Verbände

Ein Verband ist **distributiv**, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilverband sind distributiv.

Theorem

Es gibt Verbände, die nicht distributiv sind.

Distributive Verbände

Ein Verband ist **distributiv**, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilverband sind distributiv.

Theorem

Es gibt Verbände, die nicht distributiv sind.

Z.B. ist $Part([3])$ nicht distributiv.