Logik und Diskrete Strukturen
Kapitel 2: Ordnungen und Verbände

Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

Übersicht

Partielle Ordnungen
Verbände

Transitive Hülle

Relation R auf A

$\rightsquigarrow$ transitive Hülle R^+

$a\ R^+\ b$ gdw. es gibt $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit

- $a\ R\ x_1$
- $x_i\ R\ x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$
- $x_k\ R\ b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Ist $R' \supseteq R$ transitiv, dann ist $R' \supseteq R^+$.

Alternative Definition:
R^+ ist die minimale transitive Relation $R' \supseteq R$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* \;:=\; R^+ \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

R ist azyklisch, wenn es keine $a_1, \ldots, a_k \in A$ $(k \geq 1)$ gibt, mit

$$a_1 \; R \; a_2 \;\wedge\; a_2 \; R \; a_3 \;\wedge \cdots \wedge\; a_{k-1} \; R \; a_k \;\wedge\; a_k \; R \; a_1$$

Ist R azyklisch, so ist R^* eine partielle Ordnung.

Minimale und Maximale Elemente

Sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf A.

- $a \in A$ heißt maximales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- $a \in A$ heißt minimales Element,
  falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- $a \in A$ heißt größtes Element oder Maximum,
  falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.
- $a \in A$ heißt kleinstes Element oder Minimum,
  falls $a \preceq y$ für alle $y \in A$ gilt.

Kleinstes und größtes Element sind eindeutig, wenn sie existieren.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung $\preceq$ auf A ist eine lineare (oder totale) Ordnung,
wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: $\leq$ auf $\mathbb{N}$.

Ordnung $\leq$ ist eine lineare Erweiterung von $\preceq$, wenn gilt:

- $\leq$ ist lineare Ordnung auf A
- für alle $a, b \in A$ gilt: ist $a \preceq b$, dann auch $a \leq b$

Beispiel: $\leq$ ist eine lineare Erweiterung von $|$ auf $\mathbb{N}$.

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

- Induktionsanfang: $|A| = 0$. Trivial.
- Induktionssschritt: $|A| > 0$.
  Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich $\preceq$.
  Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

  Sei $\preceq'$ die Einschränkung von $\preceq$ auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).
  Offensichtlich ist $\preceq'$ eine partielle Ordnung auf A'.
  Nach der Induktionshypothese hat $\preceq'$ eine lineare Erweiterung $\leq'$.

  Wir erweitern $\leq'$ durch a als größtes Element: $\leq := \leq' \cup \{(x, a) \mid x \in A'\}$.
  Dann ist $\leq$ eine lineare Ordnung auf A.

$\square$

Infimum und Supremum

Sei $\preceq$ partielle Ordnung auf A, und $a, b \in A$.

- $x \in A$ heißt obere Schranke von a und b,
  falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- $x \in A$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von a und b,
  falls x obere Schranke von a und b ist,
  und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- $x \in A$ heißt untere Schranke von a und b,
  falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.
- $x \in A$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von a und b,
  falls x untere Schranke von a und b ist,
  und für jede untere Schranke y von a und b gilt $y \preceq x$.

Infimum und Supremum sind eindeutig, wenn sie existieren.

Ende der 3. Vorlesung

Verbände

Eine Menge A mit partieller Ordnung $\preceq$ ist ein Verband,
wenn es für je zwei a, b ein Infimum und Supremum gibt.

Beispiel 1: Potenzmengenverband

$\mathcal{P}(M)$ mit der Ordnung $\subseteq$

$A \cup B$ ist das Supremum, und $A \cap B$ das Infimum von A und B.

Kleinstes Element ist $\emptyset$, größtes Element ist M.

Beispiel 2: Teilerverband

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid n\}$ mit der Ordnung $\mid$ (Teilbarkeit)

$ggT(x, y)$ (größter gemeinsamer Teiler) ist das Infimum von x und y und
$kgV(x, y)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches) ist das Supremum von x und y.

Kleinstes Element ist 1, größtes Element ist n.

Beispiel 3: Partitionsverband

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Partitionen einer Menge M.

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n \ \exists j \leq m \ \ A_i \subseteq B_j$$

$Part(M)$ ist die Menge aller Partitionen von M.

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation $\preceq$ bildet einen Verband.

Bemerkung: die Zahlen $B_n = |Part([n])|$ heißen Bell-Zahlen.

Es gilt: $B_0 = B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5, \quad B_4 = 15, \quad B_5 = 52, \ \ldots$

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung $\sqsubseteq$ ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b.

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

- Assoziativität
  $$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$
- Kommutativität
  $$a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$$
- $a \sqsubseteq b \quad \text{gdw.} \quad a \sqcap b = a \quad \text{gdw.} \quad a \sqcup b = b$
- Absorption
  $$a \sqcup (a \sqcap b) = a \quad \text{und} \quad a \sqcap (a \sqcup b) = a$$

Distributive Verbände

Ein Verband ist distributiv, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$
$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilerverband sind distributiv.

Theorem

Es gibt Verbände, die nicht distributiv sind.

Z.B. ist $P_3 := Part([3])$ nicht distributiv.