

Logik und Diskrete Strukturen

Kapitel 2: Ordnungen und Verbände

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Sommersemester 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. Jan Johannsen

Übersicht

Partielle Ordnungen
Verbände

Transitive Hülle

Relation R auf A

\rightsquigarrow **transitive Hülle** R^+

$a R^+ b$ gdw. $a R b$ oder es gibt $x_1, \dots, x_k \in A$ ($k \geq 1$) mit

- ▶ $a R x_1$
- ▶ $x_i R x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- ▶ $x_k R b$.

Eigenschaft: R^+ ist transitiv und $R^+ \supseteq R$.

Ist $R' \supseteq R$ transitiv, dann ist $R' \supseteq R^+$.

Alternative Definition:

R^+ ist die minimale transitive Relation $R' \supseteq R$.

Reflexive, transitive Hülle

Reflexive, transitive Hülle:

$$R^* := R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Ist $R' \supseteq R$ reflexiv und transitiv, dann ist $R' \supseteq R^*$.

Alternative Definition:

R^* ist die minimale reflexive und transitive Relation $R' \supseteq R$.

R ist **azyklisch**, wenn es keine $a_1, \dots, a_k \in A$ ($k \geq 1$) gibt, mit

$$a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \wedge \dots \wedge a_{k-1} R a_k \wedge a_k R a_1$$

Ist R azyklisch, so ist R^* eine partielle Ordnung.

Minimale und Maximale Elemente

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A .

- ▶ $a \in A$ heißt **maximales Element**, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $a \preceq y$.
- ▶ $a \in A$ heißt **minimales Element**, falls es kein $y \in A$ gibt mit $y \neq a$ und $y \preceq a$.
- ▶ $a \in A$ heißt **größtes Element** oder **Maximum**, falls $y \preceq a$ für alle $y \in A$ gilt.
- ▶ $a \in A$ heißt **kleinstes Element** oder **Minimum**, falls $a \preceq y$ für alle $y \in A$ gilt.

Maximum und Minimum sind eindeutig, wenn sie existieren.

Lineare Ordnungen

Eine partielle Ordnung \preceq auf A ist eine **lineare** (oder totale) Ordnung, wenn gilt: für alle $a, b \in A$ ist $a \preceq b$ oder $b \preceq a$.

Beispiel: \leq auf \mathbb{N} .

Ordnung \leq ist eine **lineare Erweiterung** von \preceq , wenn gilt:

- ▶ \leq ist lineare Ordnung auf A
- ▶ für alle $a, b \in A$ gilt: ist $a \preceq b$, dann auch $a \leq b$

Beispiel: \leq ist eine lineare Erweiterung von $|$ auf \mathbb{N} .

Lineare Ordnungen

Theorem

Jede endliche partielle Ordnung hat eine lineare Erweiterung.

Beweis (durch vollständige Induktion).

▶ **Induktionsanfang:** $|A| = 0$. Trivial.

▶ **Induktionsschritt:** $|A| > 0$.

Sei $a \in A$ ein maximales Element bezüglich \preceq .

Sei $A' := A \setminus \{a\}$.

Sei \preceq' die Einschränkung von \preceq auf A' (d.h. $\preceq' := \preceq \cap (A' \times A')$).

Offensichtlich ist \preceq' eine partielle Ordnung auf A' .

Nach der Induktionshypothese hat \preceq' eine lineare Erweiterung \leq' .

Wir erweitern \leq' durch a als größtes Element: $\leq := \leq' \cup \{(x, a) \mid x \in A'\}$.

Dann ist \leq eine lineare Ordnung auf A .



Ende der 3. Vorlesung

Infimum und Supremum

Sei \preceq eine partielle Ordnung auf A , und $a, b \in A$.

- ▶ $x \in A$ heißt **obere Schranke** von a und b , falls $a \preceq x$ und $b \preceq x$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von a und b , falls x obere Schranke von a und b ist, und für jede obere Schranke y von a und b gilt $x \preceq y$.
- ▶ $x \in A$ heißt **untere Schranke** von a und b , falls $x \preceq a$ und $x \preceq b$ ist.
- ▶ $x \in A$ heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von a und b , falls x untere Schranke von a und b ist, und für jede untere Schranke y von a und b gilt $y \preceq x$.

Infimum und Supremum sind eindeutig, wenn sie existieren.

Verbände

Eine Menge A mit partieller Ordnung \preceq ist ein **Verband**,
wenn es für je zwei a, b ein Infimum und ein Supremum gibt.

Beispiel 1: Potenzmengenverband

$\mathcal{P}(M)$ mit der Ordnung \subseteq (Teilmenge)

$A \cup B$ ist das Supremum von A und B und
 $A \cap B$ das Infimum von A und B .

Kleinstes Element ist \emptyset , größtes Element ist M .

Beispiel 2: Teilerverband

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid n\}$ mit der Ordnung \mid (Teilbarkeit)

$ggT(x, y)$ (größter gemeinsamer Teiler) ist das Infimum von x und y und
 $kgV(x, y)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches) ist das Supremum von x und y .

Kleinstes Element ist 1, größtes Element ist n .

Beispiel 3: Partitionsverband

Sei $Part(M)$ die Menge aller Partitionen einer Menge M .

Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ Partitionen von M .

Die Relation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ auf $Part(M)$ ist definiert durch

$$\forall i \leq n, \exists j \leq m, A_i \subseteq B_j$$

Theorem

Die Menge $Part(M)$ mit der Relation \preceq bildet einen Verband.

Infimum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : $\{A_i \cap B_j \mid i, j \leq n, A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ oder Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{A}} \cap \sim_{\mathcal{B}}$

Supremum von \mathcal{A} und \mathcal{B} : Äquivalenzklassen von $(\sim_{\mathcal{A}} \cup \sim_{\mathcal{B}})^+$

Bemerkung: die Zahlen $B_n = |Part([n])|$ heißen **Bell-Zahlen**.

Es gilt: $B_0 = B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$, ...

Rechenregeln

Sei A mit der Ordnung \sqsubseteq ein Verband.

Wir schreiben $a \sqcup b$ für das Supremum und $a \sqcap b$ für das Infimum von a und b .

Infimum und Supremum erfüllen die folgenden Gesetze:

▶ Assoziativität

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c \quad \text{und} \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

▶ Kommutativität

$$a \sqcup b = b \sqcup a \quad \text{und} \quad a \sqcap b = b \sqcap a$$

▶ $a \sqsubseteq b$ gdw. $a \sqcap b = a$ gdw. $a \sqcup b = b$

▶ Absorption

$$a \sqcup (a \sqcap b) = a \quad \text{und} \quad a \sqcap (a \sqcup b) = a$$

Distributive Verbände

Ein Verband ist **distributiv**, wenn die Distributivgesetze gelten:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{und}$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Eigenschaft

Potenzmengenverband und Teilverband sind distributiv.

Theorem

Es gibt Verbände, die nicht distributiv sind.

Z.B. ist $Part([3])$ nicht distributiv.