

Zentralübung 6

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 30. Juni 2026

Basierend auf Folien von Prof. Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



Plan für heute

1. Reduktionen
2. Der Satz von Rice
3. Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)
4. Primitiv und μ -rekursive Funktionen (nur FSK)

1. Reduktionen

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen.

Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 **reduzierbar** (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine **totale berechenbare** Funktion $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1$ g.d.w. $f(w) \in L_2$.

Die Funktion f nennt man **Reduktion**.

Eselsbrücke:

$L_1 \leq L_2$
„kleines“ Problem „großes“ Problem

► $\leq$ sagt die Wahrheit.

► „Reduktion“ täuscht.

Man reduziert das „kleine“ Problem auf das „große“.

Aufgabe: Reduktion

Zeige $L = \{w \mid \text{TM } M_w \text{ berechnet } 1 \text{ bei Eingabe } 0\}$ ist unentscheidbar.

Antwort:

1. Wähle unentscheidbare Sprache, die wir auf L reduzieren:

Wir reduzieren H_0 auf L (d.h. $H_0 \leq L$).

$H_0 = \{w \mid \text{TM } M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}.$

2. Definiere f (mit $w \in H_0$ g.d.w. $f(w) \in L$):

Sei f die folgende Funktion, die bei Eingabe w , eine neue Turingmaschinenbeschreibung u erstellt, sodass M_u sich wie folgt verhält:

- ▶ M_u löscht das Band und simuliert M_w auf leerer Eingabe.
- ▶ Wenn M_w anhält, dann schreibe 1 auf das Band und akzeptiere.

3. Zeige, dass f total und berechenbar ist:

Totalität ist klar. Die TM M_u ist konstruierbar und das (De)kodieren von w und u auf TM ist möglich.

Aufgabe: Reduktion

4. Zeige $w \in H_0$ g.d.w. $f(w) \in L$:

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

g.d.w. M_u hält bei jeder Eingabe (auch bei 0) und schreibt 1 auf das Band

g.d.w. M_u berechnet 1 bei Eingabe 0

g.d.w. $u = f(w) \in L$

5. Damit gilt $H_0 \leq L$. Da H_0 unentscheidbar ist, ist auch L unentscheidbar.

2. Der Satz von Rice

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Anwendung des Satzes von Rice

Sei L eine Sprache, die als unentscheidbar zu beweisen ist.

Schritte:

1. Definiere Menge $\mathcal{S}$ von Funktionen.
2. Zeige Nichttrivialität von $\mathcal{S}$.
3. Begründe, dass $\mathcal{S}$ richtig gewählt ist, d.h. $C(\mathcal{S}) = L$.
4. Der Satz von Rice zeigt dann das Resultat.

Aufgabe: Den Satz von Rice anwenden

Sei $L = \{w \mid \text{wenn } M_w \text{ auf Eingabe 0 h\"alt, dann h\"alt } M_w \text{ auf Eingabe 1}\}$.

Antwort:

1. $\mathcal{S} = \{f \mid f \text{ ist an der Stelle 0 undefiniert oder an den Stellen 0 und 1 definiert}\}$.
2. $\mathcal{S}$ ist nicht trivial:
 - ▶ $\emptyset \subset \mathcal{S}$, da $id \in \mathcal{S}$ mit $id(x) = x$.
 - ▶ $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, da f\"ur f , mit $f(0) = 1$ aber $f(i)$ undefiniert f\"ur $i \neq 0$, gilt $f \notin \mathcal{S}$.
3. $C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$
 $= \{w \mid \text{wenn } M_w \text{ auf Eingabe 0 h\"alt, dann h\"alt } M_w \text{ auf Eingabe 1}\}$
 $= L$.
4. Mit dem Satz von Rice ist $C(\mathcal{S})$ unentscheidbar.

3. Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

Das Postsche Korrespondenzproblem

Definition

Gegeben sei ein Alphabet Σ und eine Folge von Wortpaaren

$$K = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$$

mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Das **Postsche Korrespondenzproblem (PCP)** ist die Frage, ob es für die gegebene Folge K eine nichtleere Folge von Indizes $i_1, \dots, i_m$ mit $i_j \in \{1, \dots, k\}$ gibt, sodass

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$$

Aufgabe: PCP-Instanz lösen

Sei $K = \left(\begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ c \end{bmatrix} \right)$ eine PCP-Instanz.

Hat sie eine Lösung?

Antwort:

- ▶ Eine Lösung muss mit Stein 2 beginnen (wegen gleichen Anfängen): $\begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}$
- ▶ Danach muss oben ein b kommen. Nur Stein 1 ist möglich: $\begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}$
- ▶ Oben fehlt ca . Nur Stein 3 ist möglich: $\begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}$
- ▶ Oben fehlt a . Nur Stein 2 oder 4 ist möglich. Wir nehmen 2: $\begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}$
- ▶ Oben fehlt ab . Nur Stein 2 oder 4 ist möglich. Wir nehmen 4: $\begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ c \end{bmatrix}$
- ▶ Dies führt zur Lösung 2, 1, 3, 2, 4.

Disjunktheit kontextfreier Sprachen

Das Disjunktheitsproblem *DISJ*:

Gegeben: Zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Satz

Das Disjunktheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist unentscheidbar.

Beweis: Durch Reduktion $PCP \leq DISJ$

Reduktion von PKP auf $DISJ$

Sei $(v_1, w_1), \dots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PCP mit Alphabet Σ .

Definiere zwei Grammatiken mit Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{1, \dots, n\}$,

$$G_1(I) = (\{A\}, \Sigma', P_1, A) \text{ und } L_1(I) = L(G_1(I))$$

$$G_2(I) = (\{B\}, \Sigma', P_2, B) \text{ und } L_2(I) = L(G_2(I))$$

P_1 enthält Produktionen:

$$A \rightarrow v_i A i \quad \text{und} \quad A \rightarrow v_i i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

P_2 enthält Produktionen:

$$B \rightarrow w_i B i \quad \text{und} \quad B \rightarrow w_i i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

Dann gilt: $L_1(I) \cap L_2(I) \neq \emptyset$ genau dann, wenn I eine Lösung hat.

Definition: Eine kontextfreie Grammatik G ist eindeutig, wenn es für jedes Wort $w \in L(G)$ genau einen Ableitungsbaum gibt.

Sonst heißt G mehrdeutig.

Satz

Das folgende Problem ist unentscheidbar:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G

Frage: Ist G mehrdeutig?

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen, wobei L_1 unentscheidbar ist.
Wie können wir zeigen, dass L_2 unentscheidbar ist?

- a) Zeige, dass es eine totale und berechenbare Funktion f gibt mit $w \in L_2$ g.d.w. $f(w) \in L_1$.
- b) Zeige, dass es eine totale und berechenbare Funktion f gibt mit $w \in L_1$ g.d.w. $f(w) \in L_2$.
- c) Zeige $L_1 \leq L_2$.
- d) Zeige $L_2 \leq L_1$.

Antwort: b) und c).

4. Primitiv und μ -rekursive Funktionen (nur FSK)

Primitiv rekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ist **primitiv rekursiv**, wenn sie der folgenden Definition genügt:

- ▶ Jede **konstante Funktion** $f(x_1, \dots, x_k) = c \in \mathbb{N}$ ist primitiv rekursiv.
- ▶ Die **Projektionsfunktionen** $\pi_i^k(x_1, \dots, x_k) = x_i$ sind primitiv rekursiv.
- ▶ Die **Nachfolgerfunktion** $\text{succ}(x) = x + 1$ ist primitiv rekursiv.
- ▶ **Komposition/Einsetzung**: Wenn $g : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ und für $i = 1, \dots, m$: $h_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind, dann ist auch f mit
 $f(x_1, \dots, x_k) = g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_m(x_1, \dots, x_k))$ primitiv rekursiv.

(Fortsetzung folgt.)

Definition

- **Rekursion:** Wenn $g : \mathbb{N}^{k-1} \rightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind, dann ist auch f mit

$$f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} g(x_2, \dots, x_k) & \text{falls } x_1 = 0 \\ h(f(x_1 - 1, x_2, \dots, x_k), x_1 - 1, x_2, \dots, x_k) & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv rekursiv.

Beispiele von primitiv rekursiven Funktionen

- ▶ Vertauschen, Verdoppeln, Entfernen von Argumenten ist primitiv rekursiv.
- ▶ Rekursionsabstieg muss nicht über das erste, sondern kann auch über das i -te Argument erfolgen.
- ▶ Addition $add(x, y) = x + y$ ist primitiv rekursiv.
- ▶ Multiplikation $mult(x, y) = x \cdot y$ ist primitiv rekursiv.
- ▶ Die angepasste Differenz $sub(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{falls } x \geq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist primitiv rekursiv.

1. Aufgabe: Primitive Rekursion nachweisen

Zeige **ausführlich**, dass die Summenfunktion mit $sum(0) = 0$ und $sum(n) = sum(n - 1) + n$ für $n > 0$ primitiv rekursiv ist.

Antwort:

$$sum(x) = \begin{cases} g() & \text{falls } x = 0 \\ h(sum(x - 1), x - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

- ▶ $g() = 0$
- ▶ $h(w, x) = add(w, add(x, 1)) = add(\pi_1^2(w, x), r(w, x))$, wobei
 - ▶ $r(w, x) = add(\pi_2^2(w, x), s(w, x))$

2. Aufgabe: Primitive Rekursion nachweisen

Zeige, dass die Funktion

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist.

Antwort:

Es gilt $\max(x, y) = \text{add}(x, \text{sub}(y, x))$, denn:

- ▶ Wenn $x \geq y$, dann $\text{sub}(y, x) = 0$ und $\text{add}(x, 0) = x$.
- ▶ Wenn $x < y$, dann $\text{sub}(y, x) = y - x$ und $\text{add}(x, y - x) = y$.

Da add , sub und Komposition primitiv rekursiv sind, ist $\max$ auch primitiv rekursiv.

3. Aufgabe: Primitive Rekursion nachweisen

Zeige, dass die Funktion $absdiff(x, y) = |x - y|$ primitiv rekursiv ist.

Antwort:

Beachte:

	$sub(x, y)$	$sub(y, x)$	$absdiff(x, y)$
$x \leq y$	0	$y - x$	$y - x$
$x > y$	$x - y$	0	$x - y$

Daher $absdiff(x, y) = add(sub(x, y), sub(y, x))$.

Da add , sub und Komposition primitiv rekursiv sind, ist auch $absdiff$ primitiv rekursiv.

Primitiv rekursive Prädikate

- ▶ Primitiv rekursive Funktionen sind Funktionen $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$.
- ▶ Prädikate liefern eigentlich wahr oder falsch.
- ▶ Wir verwenden $P : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$ für Prädikate P .
- ▶ Das passt immer noch zu den primitiv rekursiven Funktionen.

Aufgabe: Primitive Rekursion nachweisen

Zeige, dass das folgende Prädikat primitiv rekursiv ist:

$$equal(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Antwort:

Beachte: $equal(x, y)$ gilt g.d.w. $|x - y| = 0$. Daher:

$equal(x, y) = eq0?(absdiff(x, y))$, wobei

$$\blacktriangleright eq0?(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \text{D.h. } eq0?(x) = \begin{cases} g() & \text{falls } x = 0 \\ h(eq0?(x-1), x-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$\blacktriangleright g() = 1$$

$$\blacktriangleright h(w, x) = 0$$

Definition

Sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ eine (partielle oder totale) Funktion.

Dann ist $\mu h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definiert als

$$(\mu h)(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} n & \text{falls } h(n, x_1, \dots, x_k) = 0 \text{ und f\"ur} \\ & \text{alle } m < n: h(m, x_1, \dots, x_k) \text{ ist definiert} \\ & \text{und } h(m, x_1, \dots, x_k) > 0 \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Der μ -Operator „sucht“ nach der ersten Nullstelle von h .

Wenn diese nicht existiert (entweder da h keine Nullstelle hat, oder da h undefiniert ist f\"ur Werte, die kleiner als die Nullstelle sind), dann ist auch μh undefiniert.

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ist μ -rekursiv, wenn sie der folgenden Definition genügt:

- ▶ Jede konstante Funktion $f(x_1, \dots, x_k) = c \in \mathbb{N}$ ist μ -rekursiv.
- ▶ Die Projektionsfunktionen $\pi_i^k(x_1, \dots, x_k) = x_i$ sind μ -rekursiv.
- ▶ Die Nachfolgerfunktion $\text{succ}(x) = x + 1$ ist μ -rekursiv.
- ▶ **Komposition/Einsetzung:** Wenn $g : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ und für $i = 1, \dots, m$: $h_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ μ -rekursiv sind, dann ist auch f mit
$$f(x_1, \dots, x_k) = g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_m(x_1, \dots, x_k))$$
 μ -rekursiv.

(Fortsetzung folgt.)

Definition

- **Rekursion:** Wenn $g : \mathbb{N}^{k-1} \rightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ μ -rekursiv sind, dann ist

$$f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} g(x_2, \dots, x_k) & \text{falls } x_1 = 0 \\ h(f(x_1 - 1, x_2, \dots, x_k), x_1 - 1, x_2, \dots, x_k) & \text{sonst} \end{cases}$$

auch μ -rekursiv.

- **μ -Operator:** Wenn $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ μ -rekursiv ist, dann ist auch $f = \mu h$ μ -rekursiv.

Aufgabe: μ -Operator anwenden

Welche Funktion wird durch μh_i mit

- a) $h_1(x, y) = \text{sub}(x, y)$
- b) $h_2(x, y) = \text{sub}(y, x)$
- c) $h_3(x, y) = \text{sub}(y, \text{mult}(2, x))$

berechnet?

Aufgabe: μ -Operator anwenden

Antwort:

a) $h_1(x, y) = \text{sub}(x, y)$

Da sub überall definiert ist, berechnet μh_1 das kleinste x , sodass $\text{sub}(x, y) = 0$.

Das gilt schon für $x = 0$, also $(\mu h_1)(y) = 0$.

Aufgabe: μ -Operator anwenden

b) $h_2(x, y) = \text{sub}(y, x)$

Da sub überall definiert ist, berechnet μh_2 das kleinste x , sodass $\text{sub}(y, x) = 0$

Dies gilt für $x = y$. Zudem gilt $\text{sub}(y, z) > 0$ für alle $z < y$. Daher $(\mu h_2)(y) = y$.

Aufgabe: μ -Operator anwenden

c) $h_3(x, y) = \text{sub}(y, \text{mult}(2, x))$

Wir suchen das kleinste x , sodass $y - 2x \leq 0$.

Dies gilt für $x = \lceil y/2 \rceil$. Daher $(\mu h_3)(y) = \lceil y/2 \rceil$.