

Zentralübung 4

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 17. Juni 2026

Basierend auf Folien von Prof. Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



Plan für heute

1. Minimierung von DFAs
2. Der CYK-Algorithmus
3. Der Satz von Myhill und Nerode (nur FSK)

1. Minimierung von DFAs

Minimierung eines DFAs mit dem tabellarischen Ansatz

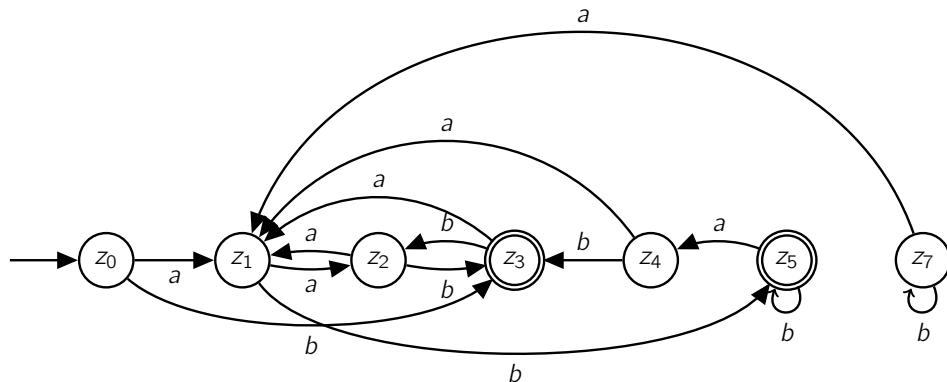
Sei M ein DFA.

Intuitiver Ansatz:

1. Entferne alle nicht erreichbaren Zustände von M .
2. Konstruiere die Partitionstabelle.
3. Bilde den minimalen DFA M' , indem Zustände derselben Klasse verschmolzen werden, basiert auf der letzten Reihe der Partitionstabelle.

Aufgabe: DFA minimieren

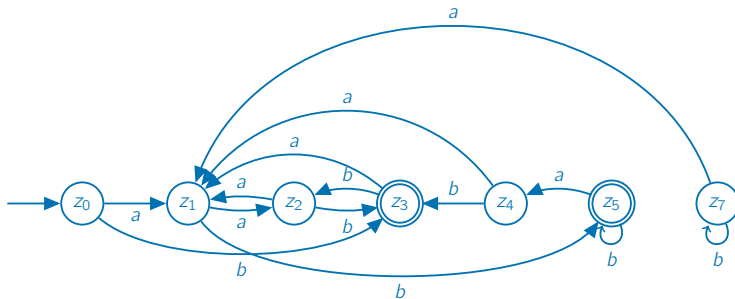
Minimieren Sie den folgenden DFA:



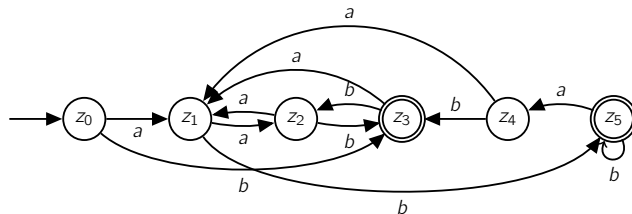
Aufgabe: DFA minimieren

Antwort:

1. Entferne alle nicht erreichbaren Zustände.



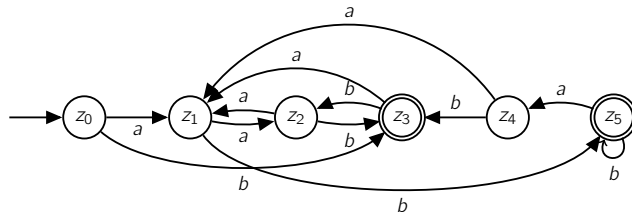
Aufgabe: DFA minimieren



2. Konstruiere die Partitionstabelle.

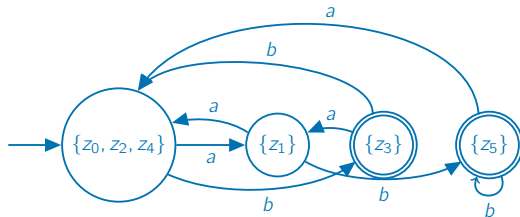
0.	z ₀	z ₁	z ₂	z ₄	z ₃	z ₅	
1.	z ₀	z ₁	z ₂	z ₄	z ₃	z ₅	mit <i>b</i>
2.	z ₀	z ₂	z ₄	z ₁	z ₃	z ₅	mit <i>b</i>

Aufgabe: DFA minimieren



3. Bilde den minimalen DFA, indem Zustände derselben Klasse verschmolzen werden, basiert auf der letzten Reihe der Partitionstabelle.

z_0	z_2	z_4	z_1	z_3	z_5
-------	-------	-------	-------	-------	-------



2. Der CYK-Algorithmus

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

Da unten links nicht S in der Tabelle steht, liegt das Wort nicht in $L(G)$.

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3		S		S		
4		S	S			
5		S, T				
6	S, U					

Da unten links S in der Tabelle steht, liegt das Wort in $L(G)$.

3. Der Satz von Myhill und Nerode (nur FSK)

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*: uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

1. Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L . Welche Äquivalenzen gelten?

- a) $a \sim_L aa$
- b) $aaa \sim_L aaa$
- c) $aaaaa \sim_L \varepsilon$
- d) $aaaa \sim_L aaaaaa$.

Antwort: b) und d).

2. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L .

Welche Äquivalenzen gelten?

- a) $a^5\$ \sim_L a^6\$$
- b) $a^i\$b^j \sim_L a^j\b^i für alle $i, j \in \mathbb{N}$
- c) $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- d) $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Antwort: a), b) und d).

3. Quiz

Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L .

Für welche Wörter u gilt $\$ \$ \sim_L u$?

- a) ε
- b) $\$$
- c) $\$ \$ \$$
- d) $b^i \$ a^j$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Antwort: c).

Der Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Zur Erinnerung:

- ▶ Die Äquivalenzklasse $[u]_{\sim_L}$ ist definiert als $\{v \mid u \sim_L v\}$.
- ▶ Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer disjunkten Äquivalenzklassen: $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup [u_2]_{\sim_L} \cup \dots$.
- ▶ Der Index kann unendlich sein.

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\{a, b\}$

$\text{Index}(\sim_L) = 3$

- ▶ $[\epsilon]_{\sim_L} = \{\epsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \{a, b\}^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \{a, b\}^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

$$\{a, b\}^* = [\epsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$$

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i , sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.

Daher sind $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$ paarweise disjunkt.

Beachte: Es ist hierfür **nicht** notwendig, alle Äquivalenzklassen der disjunkten Zerlegung von Σ^* zu finden.

Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$.
Bestimme $\text{Index}(\sim_L)$.

- | | |
|------|-------------|
| a) 0 | e) 4 |
| b) 1 | f) 5 |
| c) 2 | g) 6 |
| d) 3 | h) ∞ |

Antwort: f). Es gibt 5 disjunkte Äquivalenzklassen:
 $[\epsilon]_{\sim_L}, [a]_{\sim_L}, [aa]_{\sim_L}, [aaa]_{\sim_L}, [aaaa]_{\sim_L}$.

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\epsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L} =$ Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen

$\Sigma^* = [\epsilon]_{\sim_L} \cup [\$]_{\sim_L} \cup [ab]_{\sim_L}$

Daher $\text{Index}(L) = 3$ und L ist regulär.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$a^i \not\sim_L a^j$ für alle $i \neq j$, da $a^i\$b^i \in L$ aber $a^j\$b^i \notin L$.

Daher $\text{Index}(L) = \infty$ und L ist nicht regulär.