Zentralübung 3

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 20. Mai 2026
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Plan für heute

1. Reguläre Ausdrücke
2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen
3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

1. Reguläre Ausdrücke

Übersicht über reguläre Ausdrücke

Syntax	Semantik
$\emptyset$	$\emptyset$
ε	$\{\varepsilon\}$
a (mit $a \in \Sigma$)	$\{a\}$
$\alpha_1\alpha_2$	$L(\alpha_1)L(\alpha_2)$
$(\alpha_1 \mid \alpha_2)$	$L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$
$(\alpha)^*$	$L(\alpha)^*$

wobei α, α_1, α_2 reguläre Ausdrücke sind.

Beachte:

- Es gibt verschiedene Notationen.
  Manchmal wird $(\alpha_1 + \alpha_2)$ oder $(\alpha_1 \cup \alpha_2)$ geschrieben statt $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$.
- Ein Konstrukt ist eigentlich überflüssig.

1. Quiz

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

a) $\emptyset$

b) ε

c) $(\alpha)^*$

d) $\alpha_1\alpha_2$

e) $(\alpha_1|\alpha_2)$

Antwort: b), da ε durch $(\emptyset)^*$ dargestellt werden kann:
$L((\emptyset)^*) = \emptyset^* = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \cdots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \cdots = \{\varepsilon\}$.

2. Quiz

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$?

a) $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$

b) $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$

c) $(aaaa|bbbb)$

d) $(ab|ab|ab|ab)$

e) $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

Antwort: b) und e) sind beide richtig.

Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

Antwort: $(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)$ oder
$(\varepsilon \mid (a|b) \mid (a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b)(a|b))$.

Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

Antwort: $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)^*$.

Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

- Schwere Methode:
  Regulärer Ausdruck
  $\rightarrow$ NFA
  $\rightarrow$ DFA
  $\rightarrow$ DFA für das Komplement
  $\rightarrow$ regulärer Ausdruck
- Einfachere Methode:
  Regulärer Ausdruck
  $\rightarrow$ einfache Beschreibung der erzeugten Sprache
  $\rightarrow$ einfache Beschreibung des Komplements
  $\rightarrow$ regulärer Ausdruck

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

Finde regulären Ausdruck für das Komplement der von 0^*10^* erzeugten Sprache.

Antwort:

Schritte:

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?

   $L(0^*10^*)$ = Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

   $$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten} \\ &= \text{Wörter, die keine 1en enthalten} \\ &\quad \cup \text{ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:
     0^*
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:
     $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
   - Zusammen:
     $(0^*|(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*)$

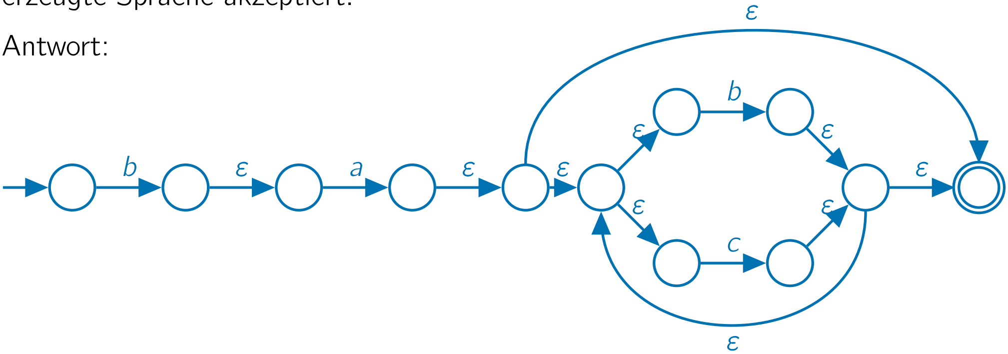
Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

Satz

Seien L_1, L_2 regulär. Dann sind $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^*, \overline{L_1}, L_1 L_2$ auch regulär.

Aus dem Aufgabenblatt 3 für FSK:

- Wenn L regulär ist, dann ist auch $\{\overline{w} \mid w \in L\}$ regulär.

Quiz

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

a) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder L_1 noch L_2 regulär.
b) Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.
c) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und L_1 regulär ist, dann ist L_2 nicht regulär.
d) Wenn L_1 und L_2 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

Antwort: c).

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von L mit Abschlusseigenschaften:

1. Nehme an, dass L regulär ist.
2. Operiere auf L unter Erhaltung der Regularität:
   vereinige, schneide, komplementiere, multipliziere L mit bekannt regulärer Sprache, bilde Kleeneschen Abschluss, drehe Sprache um.
3. Kommt dabei eine bekannt nicht reguläre Sprache heraus,
   dann hat man einen Widerspruch und die Annahme war falsch.
   Daher ist L dann nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis Durch Widerspruch. Nehme an, S ist regulär.

Da $L_1 = L(a^* b^*)$ regulär ist, muss (aufgrund der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen) auch $L_1 \cap S$ regulär sein.

Aber $L_1 \cap S = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Widerspruch. $\square$

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

Beweis Durch Widerspruch. Nehme an, T ist regulär.

Dann ist aufgrund der Abschlusseigenschaft für das Komplement auch $\overline{T}$ regulär.

Da $L(a^*b^*)$ regulär ist, gilt mit der Abschlusseigenschaft für den Schnitt auch, dass $\overline{T} \cap L(a^*b^*)$ regulär ist.

Aber $\overline{T} \cap L(a^*b^*) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Widerspruch. $\square$

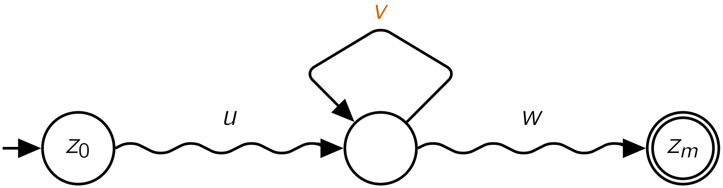
Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär.
- $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.
- $L_1 = \{\varepsilon, c\}$ ist regulär, $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär, also ist $L = \{c^i a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\}$ nicht regulär.

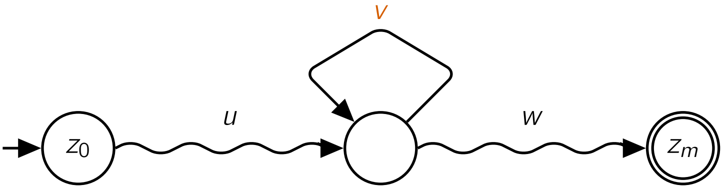
3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Intuition hinter dem Pumping-Lemma



- Wenn ein DFA n Zustände hat, dann müssen akzeptierte Wörter der Länge $\geq n$ eine Schleife durchlaufen.
- Diese Wörter kann man aufpumpen: uvw, $uvvw$, $uvvvw$, ...
  Man kann auch die Schleife überspringen: uw.
  Allgemein: uv^iw für $i \in \mathbb{N}$ liegt in der erkannten Sprache.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen



Definition

Eine Sprache L hat die Pumping-Eigenschaft (für reguläre Sprachen), wenn gilt:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iw \in L$.

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

Quiz

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

a) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass es für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ ein $i \geq 0$ gibt mit uv^iw liegt nicht in L.

b) Sei L eine Sprache. Dann ist L regulär g.d.w. es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw in L liegt für alle $i \geq 0$.

c) Sei L eine Sprache. Dann ist L keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass es für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ ein $i \geq 0$ gibt mit uv^iw liegt nicht in L.

d) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.

e) Sei L eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$. Dann ist L regulär.

Antwort: c) und d).

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei L eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \Longrightarrow L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

Kontraposition:

$$L \text{ hat nicht die Pumping-Eigenschaft} \Longrightarrow L \text{ ist nicht regulär}$$

Beweisstrategie für die Aussage „L ist nicht regulär“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h. L ist nicht regulär.

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
   Sei z zerlegt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).
   Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$ und $w = a^{n-d-e} b^n$ mit $e \geq 1$ und damit für $i = 0$:
   $uv^i w = a^{n-e} b^n \notin L$. Widerspruch.

Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z.
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
   Dann ist $\cancel{uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L}$. ~~Widerspruch.~~ $\square$

Beachte: L ist regulär, z.B. wird L durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ erzeugt.

L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

Satz

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

Beweis

1. Wir wählen $n = 2$.
2. Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = z[1]z[2]$ und w das Suffix von z ohne die ersten beiden Buchstaben.
4. Da $z \in L$, ist $z = a^j a^j$ und dann gilt: $v = aa$, $w = a^{j-1}a^{j-1}$.
   Daher gilt auch: $uv^i w = a^i a^i a^{j-1} a^{j-1} = a^{i+j-1} a^{i+j-1} \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe: Regularität widerlegen

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$
- $L_3 = \{a^n \$ a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
   Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$.
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}b^n \notin L_1$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^iw \notin L_1$). Widerspruch.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
   Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$.
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^3w = a^{n+2k}bbc^{n+1} \notin L_2$ (d.h. für $i = 3$ gilt $uv^iw \notin L_2$). Widerspruch.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
   Sei $z = a^n\$a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$.
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}\$a^n \notin L_3$. Widerspruch.

4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Definition

Eine Sprache L hat die Pumping-Eigenschaft (für kontextfreie Sprachen), wenn gilt: Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^i wx^i y \in L$.

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Dann kann vwx nicht zwei $b's$ enthalten.
- Fall vx enthält ein b: Dann $uv^0 wx^0 y \notin L_4$, da das b entfernt wurde. Widerspruch.
- Fall vx enthält kein b: Dann $uv^2 wx^2 y \notin L_4$, da maximal zwei a-Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a-Folge aber noch aus n vielen a's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist). Widerspruch. $\square$