

13b

NP-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING, (UN)DIRECTED-HAMILTON-CYCLE und TRAVELING-SALESPERSON

PD Dr. Jan Johannsen

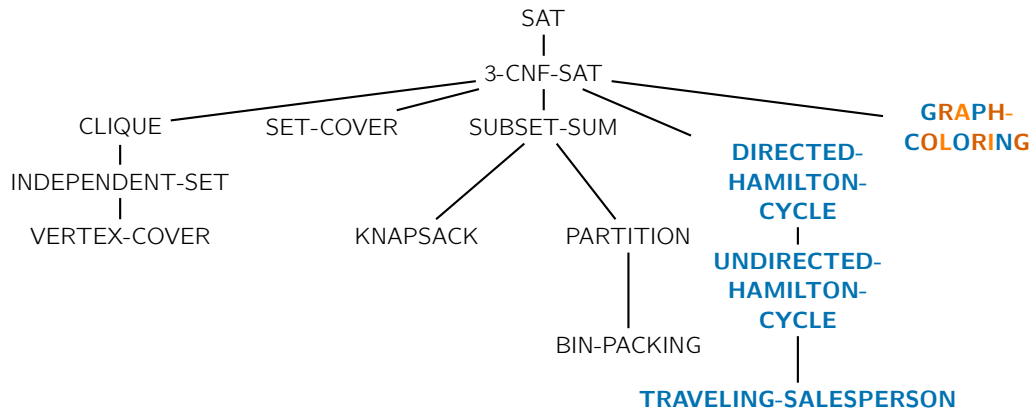
Institut für Informatik

Stand: 14. Juli 2026

Basierend auf Folien von Prof. Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



Überblick über NP-Vollständigkeitsbeweise



Das GRAPH-COLORING-Problem

Definition

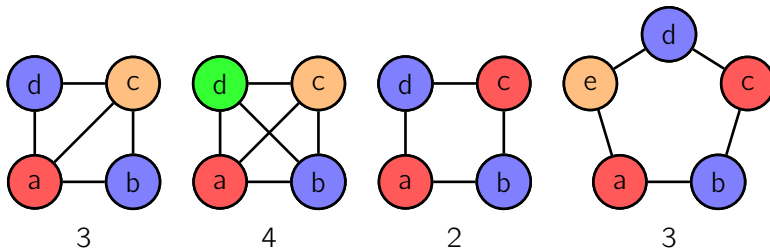
Das **GRAPH-COLORING-Problem** lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

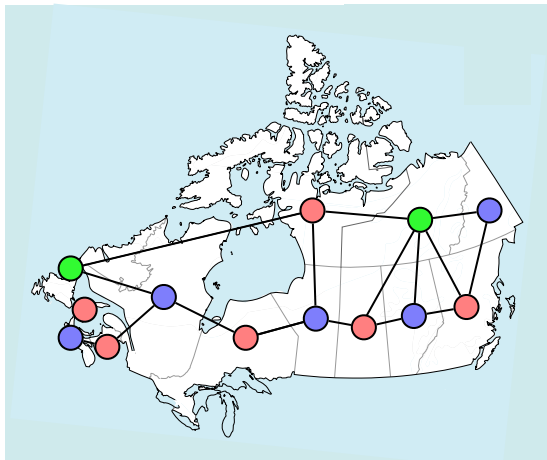
gefragt: Gibt es eine Färbung der Knoten in V mit höchstens k Farben (eine sogenannte k -Färbung), sodass keine zwei benachbarten Knoten in G die gleiche Farbe erhalten?

Beispiele für Färbungen

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?



Weiteres Beispiel für eine Färbung



Adanak

NP-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Satz

GRAPH-COLORING ist NP-vollständig.

Beweis

1. GRAPH-COLORING $\in$ NP:

Ein Zeuge gibt die Farbe aus $\{1, \dots, k\}$ für jeden Knoten $v \in V$ an.

Die Prüfrelation testet, dass die Farben von u und v stets verschieden sind, für alle $\{u, v\} \in E$.

Dies kann deterministisch in polynomieller Zeit getestet werden.

Beweis (Fortsetzung)

2. GRAPH-COLORING ist NP-schwer:

Wir zeigen $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{GRAPH-COLORING}$.

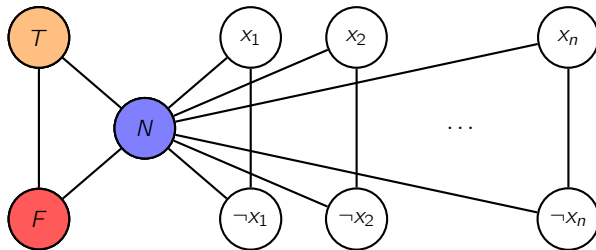
Sei $H = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau drei Literale enthält.

Seien $x_1, \dots, x_n$ die in H vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

Wir erzeugen ein GRAPH-COLORING-Problem $f(H) = (G, k)$ mit $k = 3$.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Konstruiere zunächst den folgenden Teilgraphen (die „Palette“):



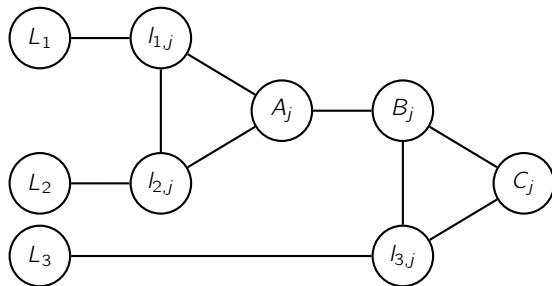
Wenn der Graph 3-färbbar ist, dann müssen T , N , F verschiedene Farben haben. O.B.d.A. seien dies genau die Farben Orange, Rot und Blau.

Für 3-Färbung muss $(x_i, \neg x_i)$ mit (T, F) oder (F, T) gefärbt werden.

Die Palette gibt eine Belegung an: Die 3-Färbung erzeugt $I(x_i) = 1$, wenn x_i mit T gefärbt ist, und $I(x_i) = 0$, wenn x_i mit F gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1 , L_2 und L_3 aus der Palette.

Die Farben der L_i sind daher F oder T .

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge die Oder-Gatter $O_1, \dots, O_m$ für jeweils $K_1, \dots, K_m$.

Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$, sei $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.

Verbinde jedes $l_{i,j}$ von O_j mit L_i aus der „Palette“.

Verbinde jeweils C_j mit N und C_j mit F .

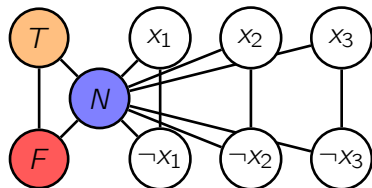
Eine zulässige Färbung muss daher C_j auf T setzen.

Damit haben wir den Graphen G konstruiert.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.

H ist erfüllbar g.d.w. folgender Graph G 3-färbbar ist.



NP-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

← Sei G 3-färbbar.

Dann sind alle C_j mit T gefärbt.

x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt.

Wir definieren die Belegung I mit $I(x_i) = 1$ wenn x_i mit T und $I(x_i) = 0$ sonst.

Die Belegung I macht die Formel H wahr, da in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht wird.

⇒ Analog kann aus einer erfüllenden Belegung I eine 3-Färbung erzeugt werden.



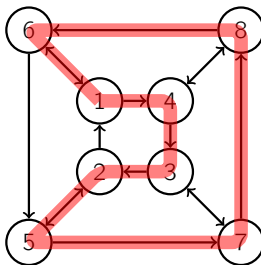
Gerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem gerichteten Graphen ist ein **Hamilton-Kreis** ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, sodass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Beispiel:



Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition

Das **DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem** lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G ?

Satz

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist NP-vollständig.

Beweis Siehe Skript.



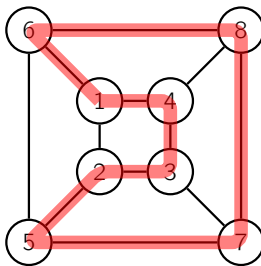
Ungerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem ungerichteten Graphen ist ein **Hamilton-Kreis** ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, sodass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$.

Beispiel:



Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition

Das **UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem** lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G ?

NP-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Satz

UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist NP-vollständig.

Beweis

1. UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\in$ NP:

Ein Zeuge ist eine Permutation π .

Die Prüfrelation testet, ob $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ für jedes i und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$ gilt.

Dies kann deterministisch in Polynomialzeit getestet werden.

NP-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Beweis (Fortsetzung)

2. UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist NP-schwer:

Wir zeigen $\text{DIRECTED-HAMILTON-CYCLE} \leq_p \text{UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE}$.

Sei f die Funktion, die aus einem gerichteten Graphen (V, E) einen ungerichteten Graphen macht, sodass

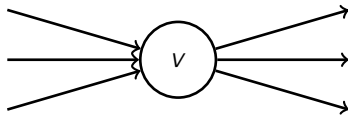
$$f(V) := \bigcup \{\{v_{in}, v, v_{out}\} \mid v \in V\}$$

$$f(E) := \{\{u_{out}, v_{in}\} \mid (u, v) \in E\} \cup \bigcup \{\{\{v_{in}, v\}, \{v, v_{out}\}\} \mid v \in V\}$$

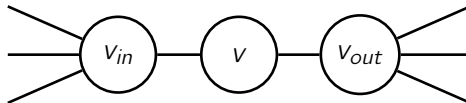
Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

NP-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

D.h. jeder Knoten v mit Ein- und Ausgängen



wird ersetzt durch



NP-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Wir zeigen: G hat einen gerichteten Hamilton-Kreis g.d.w.

$f(G)$ einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat.

- ⇒ Falls $v_{\pi(n)}, \dots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \dots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis.
- ⇐ In $f(G)$ kann der Knoten v durch einen Hamilton-Kreis nur in einer Richtung
durchlaufen werden: von v_{in} durch v durch v_{out} oder umgekehrt.
 - ▶ Falls $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \dots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis.
 - ▶ Falls $v_{out,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{in,\pi(1)}, \dots, v_{out,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{in,\pi(n)}, v_{out,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{\pi(n)}, \dots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis.

□

Das TRAVELING-SALESPERSON-Problem

Definition

Das **TRAVELING-SALESPERSON-Problem** lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: eine Menge von Knoten (Städten) $V = \{v_1, \dots, v_n\}$,
eine $(n \times n)$ -Matrix $(M_{i,j})$ mit Entfernungen $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ zwischen den
Städten v_i und v_j , sowie
eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Rundreise, die alle Städte besucht, der Startort gleich dem
Zielort ist, und nicht länger als k ist?

Formal: Gibt es eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, sodass
 $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i), \pi(i+1)}) + M_{\pi(n), \pi(1)} \leq k$?

NP-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Satz

Das TRAVELING-SALESPERSON-Problem ist NP-vollständig.

Beweis

► TRAVELING-SALESPERSON $\in$ NP:

Ein Zeuge ist eine Permutation π .

Die Prüfrelation testet, ob $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i), \pi(i+1)}) + M_{\pi(n), \pi(1)} \leq k$ gilt.

Dies kann deterministisch in Polynomialzeit getestet werden.

NP-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

► TRAVELING-SALESPERSON ist NP-schwer:

Wir zeigen $\text{UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE} \leq_p \text{TRAVELING-SALESPERSON}$.

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: G hat einen Hamilton-Kreis g.d.w.

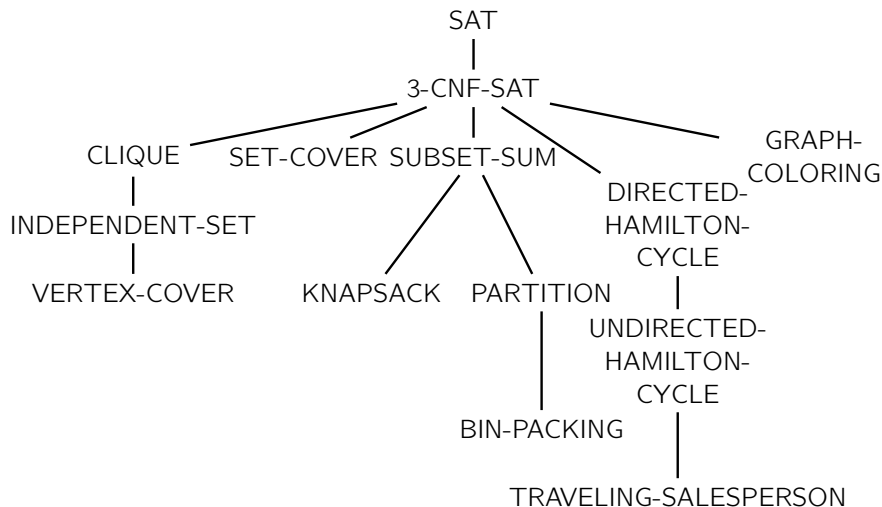
$f(G)$ eine Rundreise der Länge n hat.

⇒ Wenn G einen Hamilton-Kreis hat, dann ist das eine Rundreise der Länge n .

⇐ Wenn $f(G)$ eine Rundreise der Länge $\leq n$ hat, dann muss die Länge genau n sein, und es können nur Kanten mit Entfernung 1 verwendet werden.

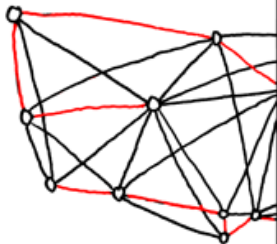
Daher hat G einen Hamilton-Kreis. □

Zusammenfassung der NP-Vollständigkeitsbeweise



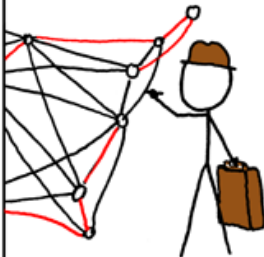
BRUTE-FORCE
SOLUTION:

$$O(n!)$$



DYNAMIC
PROGRAMMING
ALGORITHMS:

$$O(n^2 2^n)$$



SELLING ON EBAY:
 $O(1)$

STILL WORKING
ON YOUR ROUTE?

SHUT THE
HELL UP.



xkcd.com/399/