

12a

NP-Vollständigkeit von SAT

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 7. Juli 2026

Basierend auf Folien von Prof. Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



Wiederholung: NP-Vollständigkeit

Definition

Eine Sprache L heißt **NP-vollständig**, wenn gilt

1. $L \in \text{NP}$ und
2. L ist **NP-schwer**: für alle $L' \in \text{NP}$ gilt $L' \leq_p L$.

Beweistechnik für NP-Vollständigkeit von L :

1. Zeige $L \in \text{NP}$.
2. Zeige $L_0 \leq_p L$ für ein bekanntes NP-vollständiges Problem L_0 .
Dann folgt die NP-Schwere von L .

Wir brauchen ein erstes Problem, dessen NP-Vollständigkeit wir von Hand nachweisen müssen.

Dafür nehmen wir das **Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik** (kurz **SAT**).

Definition

Die **aussagenlogischen Formeln** über einer Menge X von **Variablen** sind durch folgende Regeln definiert:

- ▶ Jede Variable $x \in X$ ist eine Formel.
- ▶ Ist F eine Formel, dann auch $\neg F$.
- ▶ Sind F und G Formeln, dann auch $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$.

Wir verwenden $F \leftrightarrow G$ als Abkürzung für $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.

Definition

Sei $\alpha : X \rightarrow \{0, 1\}$ eine Belegung der Variablen X mit den Wahrheitswerten 0 („falsch“) und 1 („wahr“).

Der Wert $\alpha(F)$ einer gegebenen Formel F wird durch folgende Regeln definiert:

- ▶ $\alpha(x)$ ist durch I gegeben.
- ▶ $\alpha(\neg F) := 1 - \alpha(F)$.
- ▶ $\alpha(F \wedge G) := \min \{\alpha(F), \alpha(G)\}$.
- ▶ $\alpha(F \vee G) := \max \{\alpha(F), \alpha(G)\}$.
- ▶ $\alpha(F \rightarrow G) := \alpha(\neg F \vee G) = \max \{1 - \alpha(F), \alpha(G)\}$.

α erfüllt F , geschrieben $\alpha \models F$, wenn $\alpha(F) = 1$.

F ist erfüllbar, wenn es eine Belegung α gibt mit $\alpha \models F$.

Definition

Das **Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik** (kurz **SAT**) lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: eine aussagenlogische Formel F

Frage: Ist F erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung α mit $\alpha \models F$?

Als formale Sprache:

$\text{SAT} = \{\text{code}(F) \in \Sigma^* \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Aussagenlogik}\}$

Zugehörigkeit von SAT zu NP

Lemma

SAT $\in$ NP.

Beweis

Ein Zeuge für $F \in \text{SAT}$ ist eine Bewertung α mit $\alpha \models F$.

Da α nur Variablen bewerten muss, die in F vorkommen, ist $|\text{dom}(\alpha)| \leq |F|$, und daher $|\alpha| \leq O(|F|)$.

Die Prüfrelation R_{SAT} ist gegeben durch $(\alpha, F) \in R_{\text{SAT}}$ gdw. $\alpha \models F$.

Dies ist in Zeit $O(|F|^2)$ entscheidbar:

1. Ersetze jede Variable x durch ihren Wert $\alpha(x) \in \{0, 1\}$, in Zeit $O(|F|)$.
2. Berechne durch sukzessive Vereinfachung den Wert $\alpha(F)$, in Zeit $O(|F|)^2$.



NP-Schwere von SAT

Wir müssen zeigen:

$$L \leq_p \text{SAT für alle } L \in \text{NP}$$

Da $L \in \text{NP}$, gibt es eine polynomiell zeitbeschränkte NTM M , die L akzeptiert.

Für Wort w erstelle Formel $f(w) = F$ (in deterministischer Polynomialzeit), sodass gilt:

F ist erfüllbar g.d.w. M akzeptiert w

In den nächsten Folien werden wir F definieren und zeigen, dass sie die erwünschte Eigenschaft hat.

F wird das Verhalten von M auf w kodieren. Aus einer erfüllende Belegung α für F wird sich einen akzeptierenden Lauf von M ablesen lassen und umgekehrt.

Hilfssatz für den NP-Schwere-Beweis von SAT

Lemma

Für aussagenlogische Variablen $\{x_1, \dots, x_n\}$ gibt es eine aussagenlogische Formel $\text{exactlyOne}(x_1, \dots, x_n)$, sodass

$\alpha(\text{exactlyOne}(x_1, \dots, x_n)) = 1$ g.d.w. α setzt genau eine der Variablen x_i auf 1 und alle anderen auf 0

Dabei ist die Größe der Formel $\text{exactlyOne}(x_1, \dots, x_n)$ in $O(n^2)$.

Beweis Wir nehmen

$$\text{exactlyOne}(x_1, \dots, x_n) := (x_1 \vee \dots \vee x_n) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \wedge x_j)$$

► $(x_1 \vee \dots \vee x_n)$ sichert „mindestens 1“ zu.

► $\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \wedge x_j)$ sichert „höchstens 1“ zu.

□

Lemma

SAT ist NP-schwer.

Beweis Sei $L \in \text{NP}$ beliebig. Wir müssen zeigen: $L \leq_p \text{SAT}$.

Sei M eine NTM mit $L(M) = L$, w eine Eingabe für M und $\text{ntime}_M(w) \leq p(|w|)$.

Wir werden eine aussagenlogische Formel F konstruieren, sodass gilt

F ist erfüllbar g.d.w. M akzeptiert w

Dabei muss F in Polynomialzeit konstruierbar sein.

D.h. wir geben eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion $f(w)$ an, sodass $f(w) \in \text{SAT}$ g.d.w. M akzeptiert w .

NP-Schwere von SAT

Notationen:

Eingabe:	$w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$	Zustände:	$Z = \{z_0, \dots, z_k\}$
Bandalphabet:	$\Gamma = \{b_1, \dots, b_\ell\}$	Startzustand:	z_0

Aussagenlogische Variablen in der Formel F :

Variable	Index-Bereich	Bedeutung
$State_{t,z}$	$t = 0, 1, \dots, p(n)$ $z = z_0, \dots, z_k$	$State_{t,z} = 1$ g.d.w. nach t Schritten ist M im Zustand z .
$Pos_{t,i}$	$t = 0, 1, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$	$Pos_{t,i} = 1$ g.d.w. nach t Schritten ist der Schreib-Lesekopf auf Position i
$Tape_{t,i,b}$	$t = 0, 1, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$ $b = b_1, \dots, b_\ell$	$Tape_{t,i,b} = 1$ g.d.w. nach t Schritten steht in Position i das Zeichen b

Die Bereiche reichen aus, da die TM nicht mehr als $p(n)$ Schritte macht.

Aufbau der Formel F :

$$F = \textit{Rand} \wedge \textit{Anfang} \wedge \textit{Übergang} \wedge \textit{Ende}$$

- ▶ *Rand*: Randbedingungen
- ▶ *Anfang*: Anfangsbedingungen
- ▶ *Übergang*: Bedingungen für den Zustandsübergang
- ▶ *Ende*: Endbedingung

Randbedingungen

Zu jedem Zeitpunkt t

- ... ist M in genau einem Zustand z :

$$\bigwedge_{t \in \{0, \dots, p(n)\}} \text{exactlyOne}(\text{State}_{t,z_0}, \dots, \text{State}_{t,z_k})$$

- ... ist der Schreib-Lesekopf von M in genau einer Position auf dem Band:

$$\bigwedge_{t \in \{0, \dots, p(n)\}} \text{exactlyOne}(\text{Pos}_{t,-p(n)}, \dots, \text{Pos}_{t,p(n)})$$

- ... befindet sich in jeder Bandzelle genau ein Symbol aus Γ :

$$\bigwedge_{t \in \{0, \dots, p(n)\}} \bigwedge_{i \in \{-p(n), \dots, p(n)\}} \text{exactlyOne}(\text{Tape}_{t,i,b_1}, \dots, \text{Tape}_{t,i,b_\ell})$$

Daher:

$$\text{Rand} := \bigwedge_{t \in \{0, \dots, p(n)\}} \left(\begin{array}{l} \text{exactlyOne}(\text{State}_{t,z_0}, \dots, \text{State}_{t,z_k}) \\ \wedge \text{exactlyOne}(\text{Pos}_{t,-p(n)}, \dots, \text{Pos}_{t,p(n)}) \\ \wedge \bigwedge_{i \in \{-p(n), \dots, p(n)\}} \text{exactlyOne}(\text{Tape}_{t,i,b_1}, \dots, \text{Tape}_{t,i,b_\ell}) \end{array} \right)$$

Anfangsbedingungen

Die Bedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$:

- ▶ M ist im Startzustand: $State_{0,z_0}$
- ▶ Der Schreib-Lesekopf ist auf Position 0: $Pos_{0,0}$
- ▶ Die Eingabe $w = a_1 \dots a_n$ steht auf dem Band und alle anderen Zellen enthalten das Blank-Symbol:

$$\left(\bigwedge_{i \in \{0, \dots, n-1\}} Tape_{0,i,a_{i+1}} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in \{-p(n), \dots, -1\}} Tape_{0,i,\square} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in \{n, \dots, p(n)\}} Tape_{0,i,\square} \right)$$

Daher:

$$\text{Anfang} := \text{State}_{0,z_0} \wedge \text{Pos}_{0,0} \wedge \\ \left(\bigwedge_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \text{Tape}_{0,i,a_{i+1}} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in \{-p(n), \dots, -1\}} \text{Tape}_{0,i,\square} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in \{n, \dots, p(n)\}} \text{Tape}_{0,i,\square} \right)$$

Übergangsbedingungen

Für Übergang von t zu $t + 1$:

- Zustand, Bandinhalt, Position ändern.

Sei $dir(N) = 0$, $dir(L) = -1$, $dir(R) = 1$:

$$\bigwedge_{\substack{t \in \{0, \dots, p(n)-1\}, z \in Z, \\ i \in \{-p(n)+1, \dots, p(n)-1\}, b \in \Gamma}} \left((State_{t,z} \wedge Pos_{t,i} \wedge Tape_{t,i,b}) \rightarrow \bigvee_{(z', b', y) \in \delta(z,b)} (State_{t+1,z'} \wedge Pos_{t+1,i+dir(y)} \wedge Tape_{t+1,i,b'}) \right)$$

- Zellen auf denen der Schreib-Lesekopf nicht steht, bleiben unverändert:

$$\bigwedge_{\substack{t \in \{0, \dots, p(n)-1\}, \\ i \in \{-p(n), \dots, p(n)\}, \\ b \in \Gamma}} ((\neg Pos_{t,i} \wedge Tape_{t,i,b}) \rightarrow Tape_{t+1,i,b})$$

Übergangsbedingungen

Daher:

Übergang :=

$$\bigwedge_{\substack{t \in \{0, \dots, p(n)-1\}, \\ z \in Z, \\ i \in \{-p(n)+1, \dots, p(n)-1\}, \\ b \in \Gamma}} \left((State_{t,z} \wedge Pos_{t,i} \wedge Tape_{t,i,b}) \rightarrow \bigvee_{(z',b',y) \in \delta(z,b)} (State_{t+1,z'} \wedge Pos_{t+1,i+dir(y)} \wedge Tape_{t+1,i,b'}) \right) \\ \wedge \left(\bigwedge_{\substack{t \in \{0, \dots, p(n)-1\}, \\ i \in \{-p(n), \dots, p(n)\}, \\ b \in \Gamma}} ((\neg Pos_{t,i} \wedge Tape_{t,i,b}) \rightarrow Tape_{t+1,i,b}) \right)$$

Ein Endzustand wird erreicht:

$$\textit{Ende} := \bigvee_{z \in E, t \in \{0, \dots, p(n)\}} \textit{State}_{t,z}$$

NP-Schwere von SAT

Wenn es eine **Belegung** α der Variablen von F gibt mit $\alpha(F) = 1$, dann kann daraus ein **akzeptierender Lauf** für M auf Eingabe w konstruiert werden.

Umgekehrt: Wenn M die Eingabe w akzeptiert, dann $z_0 w \vdash_M^r uz_e v$ mit $z_e \in E$ und $r \leq p(n)$. Der Lauf liefert eine **Belegung** α mit $\alpha(F) = 1$.

Damit gilt: F ist erfüllbar g.d.w. M akzeptiert w .

F kann in (deterministischer) Polynomialzeit berechnet werden:

Teilformel	Größe (Anzahl an Variablenvorkommen)
<i>Rand</i>	$O(p(n)^3)$
<i>Anfang</i>	$O(p(n))$
<i>Übergang</i>	$O(p(n)^2)$
<i>Ende</i>	$O(p(n))$
F	$O(p(n)^3)$

Daher: $L \leq_p \text{SAT}$ für alle $L \in \text{NP}$. D.h. SAT ist NP-schwer.



Insgesamt haben wir gezeigt:

Satz (Satz von Cook)

Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig.