4c

Eigenschaften von regulären Sprachen

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 5. Mai 2026
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann sind $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ und ${L_1}^*$ regulär.

Beweis Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen.

Seien reguläre Ausdrücke α_1, α_2 mit $L(\alpha_i) = L_i$ für $i \in \{1, 2\}$.

- $(\alpha_1|\alpha_2)$ erzeugt $L(\alpha_1|\alpha_2) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) = L_1 \cup L_2$.
- $\alpha_1\alpha_2$ erzeugt $L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) = L_1 L_2$.
- $(\alpha_1)^*$ erzeugt $L(\alpha_1^*) = L(\alpha_1)^* = {L_1}^*$. □

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung. D.h. wenn L regulär ist, dann ist das Komplement $\overline{L}$ regulär.

Beweis Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert.

Dann akzeptiert $\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$ die Sprache $\overline{L}$:
Offensichtlich gilt $\widetilde{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E$ g.d.w. $\widetilde{\delta}(z_0, w) \notin E$.

Daher ist $\overline{L}$ regulär. $\square$

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis Dies folgt aus $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ und da reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Komplementbildung sind. $\square$

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ regulär.

Alternativer Beweis

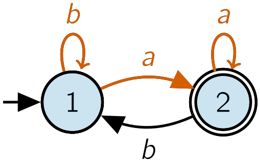
Seien $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$ DFAs,
die $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$ akzeptieren.
Der Produktautomat von M_1 und M_2 ist der DFA
$M_1 \times M_2 = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$ mit

$$\delta((z_1, z_2), a) := (\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)) \quad \text{für alle } a \in \Sigma \text{ und } (z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2$$

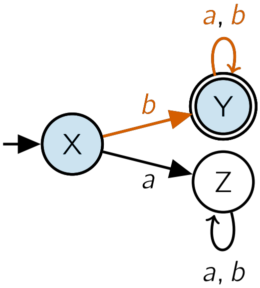
$M_1 \times M_2$ akzeptiert $L_1 \cap L_2$, denn es gilt:
$\widetilde{\delta}((z_{01}, z_{02}), w) \in E_1 \times E_2$ g.d.w. $\widetilde{\delta}_1(z_{01}, w) \in E_1$ und $\widetilde{\delta}_2(z_{02}, w) \in E_2$. $\square$

Beispiel für den Produktautomaten

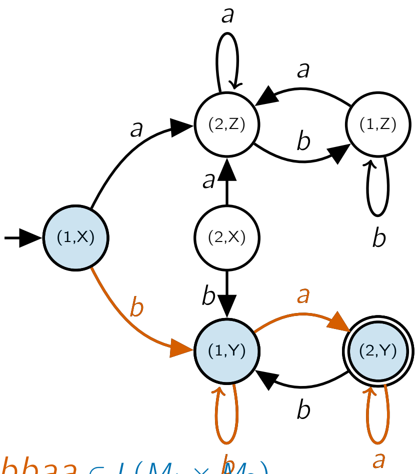
DFA M_1:



DFA M_2:



Produktautomat $M_1 \times M_2$:



Wort: $bbaa \in L(M_1 \times M_2)$

Abschlusseigenschaften zusammengefasst

Theorem (Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen)

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Schnitt, Komplementbildung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von L mit Abschlusseigenschaften:

1. Nehme an, dass L regulär ist.
2. Operiere auf L unter Erhaltung der Regularität:
   vereinige, schneide, komplementiere, multipliziere L mit bekannt regulärer Sprache, bilde Kleeneschen Abschluss.
3. Kommt dabei eine bekannt nicht reguläre Sprache heraus,
   dann hat man einen Widerspruch und die Annahme war falsch.
   Daher ist L dann nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, L ist regulär.

Dann ist $\overline{L}$ auch regulär.

$\overline{L} = \{a\}^* \setminus L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist aber nicht regulär (bereits gezeigt).
Widerspruch. □

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, L ist regulär.

Die Sprache $L' = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, da der reguläre Ausdruck $a^* b^*$ sie erzeugt.

Da L und L' regulär sind, ist auch $L \cap L'$ regulär.

$L \cap L' = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist aber nicht regulär (bereits gezeigt). Widerspruch. □

Wortproblem für reguläre Grammatiken

Definition

Das Wortproblem für Typ i-Grammatiken ist die Frage, ob für eine gegebene Typ i-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ $w \in L(G)$ gilt oder nicht.

Satz

Das Wortproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar:
Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe von regulärer Grammatik G und Wort w nach endlicher Zeit entscheidet, ob $w \in L(G)$ gilt oder nicht.

Beweis Sei G eine reguläre Grammatik und sei M ein DFA mit $L(M) = L(G)$.
Für M ist das Wortproblem in Linearzeit in der Länge des Wortes lösbar, denn die Berechnung von $\widetilde{\delta}(z_0, w)$ braucht für einen DFA nur $|w|$ Schritte. $\square$

Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

Beweis Sei G eine reguläre Grammatik und sei M ein DFA mit $L(M) = L(G)$.

Dann gilt $L(M) = \emptyset$ g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in M gibt.

Dies kann man leicht mit einer Tiefensuche (Depth-First-Search) auf dem Zustandsgraphen von M prüfen. $\square$

Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

Beweis Sei G eine reguläre Grammatik und sei M ein DFA mit $L(M) = L(G)$.

Es gilt $|L(M)| < \infty$ g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.

Prüfe dies mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraphen von M. $\square$

Schnittproblem für reguläre Grammatiken

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

Beweis Seien G_1, G_2 reguläre Grammatiken und seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L(G_i)$ für $i \in \{1, 2\}$.

Konstruiere den Produktautomaten $M_1 \times M_2$ mit $L(M_1 \times M_2) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

Prüfe das Leerheitsproblem für $L(M_1 \times M_2)$. $\square$

Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

Beweis Seien G_1, G_2 reguläre Grammatiken und seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L(G_i)$ für $i \in \{1, 2\}$.

Minimiere M_1 und M_2.

Prüfe die minimalen DFAs auf Gleichheit bis auf Umbenennung. $\square$