

## 4b

**Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen**

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 5. Mai 2026

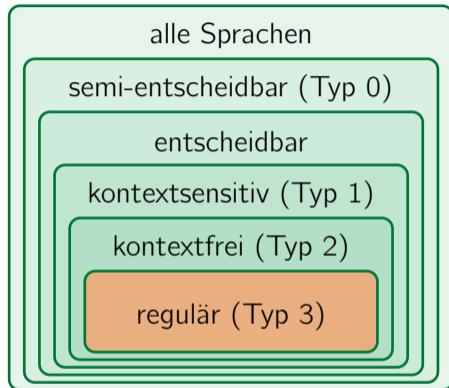
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



# Hintergrund zum Pumping-Lemma

Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

- ▶ reguläre Grammatiken
- ▶ endliche Automaten
- ▶ reguläre Ausdrücke



Wie zeigt man, dass eine formale Sprache **nicht regulär** ist?

Das **Pumping-Lemma** ist ein Werkzeug dafür.

# Exkurs: Beweistechniken für Quantoren

Beweise für  $\forall$  und  $\exists$  variieren, je nachdem, ob die Aussage zu beweisen ist oder angenommen wird.

Auszug aus Aufgabenblatt 0:

	Um eine Aussage dieser Form zu beweisen ...	Wenn eine Aussage dieser Form angenommen wird ...
$\forall x, P(x)$	beweise, dass $P(a)$ für ein beliebiges $a$ gilt	nimm $P(a)$ für jedes konkrete $a$ an
$\exists x, P(x)$	gib ein konkretes $a$ an und beweise $P(a)$	nimm ein beliebiges $a$ an, für das $P(a)$ gilt

## Definition

Eine mit  $>$  ausgestattete Menge  $A$  hat die **EGE-Eigenschaft**, wenn gilt:  
Für jedes  $a \in A$  gibt es ein  $b \in A$ , sodass  $b > a$   
(d.h.  $\forall a \in A, \exists b \in A, b > a$ ).

(„EGE“ steht für „*exists greater element*“.)

## Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

### Satz

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  mit  $>$  haben die EGE-Eigenschaft.

**Beweis** Wir zeigen: Für jede Zahl  $a \in \mathbb{N}$  gibt es eine Zahl  $b \in \mathbb{N}$ , sodass  $b > a$ .

Sei  $a \in \mathbb{N}$  beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es  $b \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $b > a$ .

Wir wählen  $b = a + 1$  und beweisen  $a + 1 > a$ , was offensichtlich gilt.  $\square$

### Satz

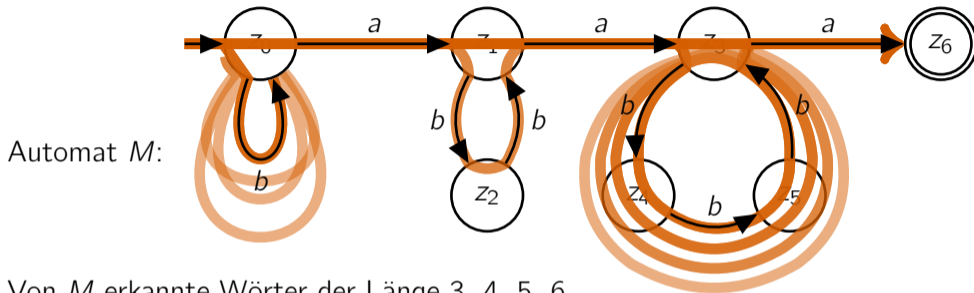
Die nicht positiven ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$  mit  $>$  haben nicht die EGE-Eigenschaft.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$  die EGE-Eigenschaft hat.

D.h. für jede Zahl  $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  gibt es eine Zahl  $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , sodass  $b > a$ .

Wir wählen  $a = 0$ . Es gibt also eine Zahl  $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , sodass  $b > 0$ . Aber 0 ist die größte Zahl in  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ . Widerspruch.  $\square$

# Intuition hinter dem Pumping-Lemma



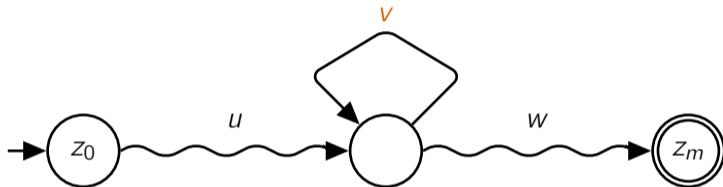
Von  $M$  erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Beobachtungen:

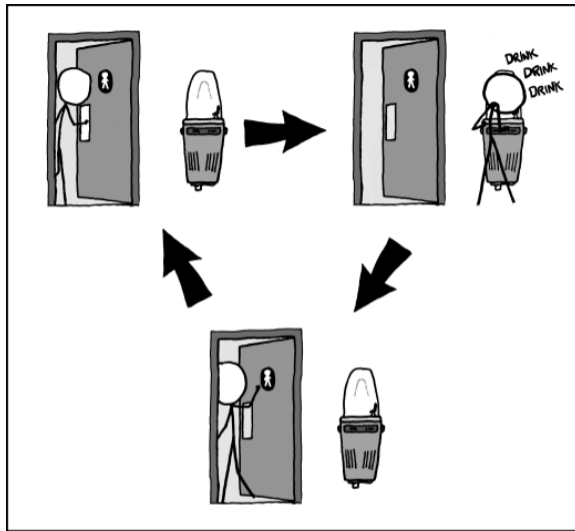
1. Jedes Wort  $z \in L(M)$  der Länge  $> 3$  muss mindestens **eine Schleife durchlaufen**.
2. Wenn die **Schleife mehrfach durchgelaufen** wird, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt. D.h. Wörter in  $L(M)$  mit Länge  $> 3$  können wir **aufpumpen** und verbleiben in  $L(M)$ .

# Intuition hinter dem Pumping-Lemma

Gilt das allgemein? Ja



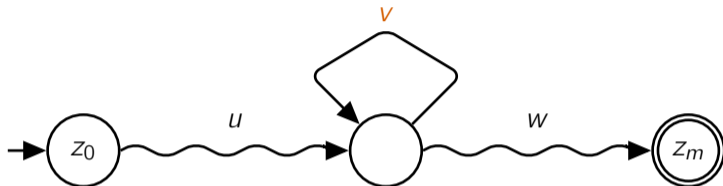
- ▶ Wenn ein DFA  $n$  Zustände hat, dann müssen akzeptierte Wörter der Länge  $\geq n$  eine Schleife durchlaufen.
- ▶ Diese Wörter kann man aufpumpen:  $uvw, uvvw, uvvww, \dots$   
Man kann auch die Schleife überspringen:  $uw$ .  
Allgemein:  $uv^i w$  für  $i \in \mathbb{N}$  liegt in der erkannten Sprache.



I AVOID DRINKING FOUNTAINS OUTSIDE BATHROOMS  
BECAUSE I'M AFRAID OF GETTING TRAPPED IN A LOOP.

[xkcd.com/986/](http://xkcd.com/986/)

# Die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen



## Definition

Eine Sprache  $L$  hat die **Pumping-Eigenschaft** (für reguläre Sprachen), wenn gilt: Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, sodass gilt:

1.  $|uv| \leq n$
2.  $|v| \geq 1$
3. für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^i w \in L$ .

# Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

**Beweis** Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Wir zeigen, dass es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  gibt, sodass jedes  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, sodass  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  und für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA mit  $L(M) = L$ .

Wir wählen  $n = |Z|$ . Sei  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .

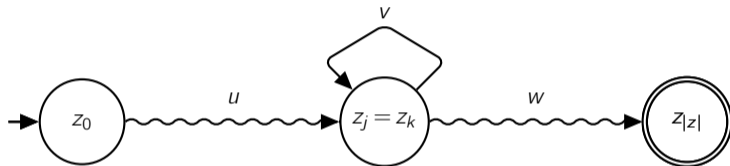
Sei  $z_0, \dots, z_{|z|}$  der Lauf für  $z$ , mit  $z_{|z|} \in E$ .

Spätestens nach Lesen von  $n (= |Z|)$  Zeichen wird einen Zustand erneut besucht.

Sei  $z_k$  (mit  $k \leq n$ ) der erste Zustand, der bereits besucht wurde.

# Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

**Beweis** (Fortsetzung) Daher gibt es  $j < k$ , sodass  $z_k = z_j$ ,  $k$  ist minimal und  $z = uvw$  mit



Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- ▶  $|v| \geq 1$ : folgt aus  $j < k$ .
- ▶  $|uv| \leq n$ : folgt aus  $k \leq n$ .
- ▶  $uv^i w \in L(M)$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ : lässt sich im obigen Diagramm lesen. □

# Das Paradoxon der endlichen Sprachen

Endliche Sprachen sind regulär.

Warum erfüllen sie die Pumping-Eigenschaft?

## Definition

Eine Sprache  $L$  hat die Pumping-Eigenschaft (für reguläre Sprachen), wenn gilt: Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, sodass gilt:

1.  $|uv| \leq n$
2.  $|v| \geq 1$
3. für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^i w \in L$ .

Wähle  $n$  größer als die Länge des längsten Worts.

Dann ist die Eigenschaft trivial erfüllt.

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist regulär  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

$L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** regulär

Beweisstrategie für die Aussage „ $L$  ist **nicht** regulär“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft **nicht** hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h.  $L$  ist **nicht** regulär.

# Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Um Nichtregularität von  $L$  zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft hat.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n$ . Damit ist auch  $|z| \geq n$  erfüllt.

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $u = a^r$ ,  $v = a^s$  mit  $r + s \leq n$ ,  $s \geq 1$  und  $w = a^t b^n$  mit  $r + s + t = n$ .

Wir betrachten das Wort  $uv^2w$ . Es gilt  $uv^2w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$ , da  $s \geq 1$ .

Nach Annahme gilt aber  $uv^i w \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ , insbesondere für  $i = 2$ .

Widerspruch. □

# Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Es geht kürzer:

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n$  mit  $|z| \geq n$ .

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $u = a^r$ ,  $v = a^s$  mit  $r + s \leq n$ ,  $s \geq 1$  und  $w = a^t b^n$  mit  $r + s + t = n$ .

Wir wählen  $i = 2$ . Es gilt  $uv^2 w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$ , da  $s \geq 1$ .

Widerspruch. □

# Das Pumping-Lemma als Spiel

---

Sei  $L$  die Sprache.

Schritte:

1. Der **Gegner** wählt die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .
2. **Wir** wählen das Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Der **Gegner** wählt die Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$ .
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein  $i \in \mathbb{N}$  angeben können, sodass  $uv^i w \notin L$ .

Wenn **wir** das Spiel **für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners gewinnen**, dann haben wir nachgewiesen, dass  $L$  nicht regulär ist.

# Das Pumping-Lemma als Spiel

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom **Gegner** gewählt.
2. **Wir** wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Der **Gegner** wählt die Zerlegung  $z = uvw$ , sodass  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$ . Dann ist  $u = a^r$ ,  $v = a^s$  mit  $r + s \leq n$ ,  $s \geq 1$  und  $w = a^t b^n$  mit  $r + s + t = n$ .
4. **Wir** wählen  $i = 2$ . Es gilt  $uv^2w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$ , da  $s \geq 1$ .  
Also gewinnen wir. □

# Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^p$ , wobei  $p$  die nächste Primzahl ist, die größer gleich  $n$  ist. Wir haben  $|z| = p \geq n$ .

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Dann  $u = a^r$ ,  $v = a^s$  (mit  $s \geq 1$ ) und  $w = a^t$ .

Wir wählen  $i = p + 1$ . Es gilt  $uv^{p+1}w \notin L$ , denn

$uv^{p+1}w = a^r(a^s)^{p+1}a^t = a^{r+s \cdot (p+1)+t} = a^{r+s \cdot p+s+t} = a^{s \cdot p+p} = a^{p \cdot (s+1)}$  und für  $s \geq 1$  folgt, dass  $p \cdot (s + 1)$  keine Primzahl sein kann. Widerspruch.  $\square$

# Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z = a^{n^2} \in L$  mit  $|z| = n^2 \geq n$ .

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ .

Wir wählen  $i = 2$ . Wir betrachten  $uv^2w = a^k$ .

- ▶  $1 + n^2 \leq k$  (denn  $|v| \geq 1$ )
- ▶  $k \leq n^2 + n$  (denn  $|uv| \leq n$  und daher  $|v| \leq n$ )

D.h. wir haben  $n^2 < k \leq n^2 + n = (n+1) \cdot n < (n+1)^2$ .

Dann kann  $k$  keine Quadratzahl sein. Daher gilt  $uv^2w \notin L$ . Widerspruch. □

# Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z = a^n b a^n \in L$  mit  $|z| = 2n + 1 \geq n$ .

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ .

Wir wählen  $i = 0$ . Es gilt  $uv^0 w \notin L$ , denn  $uv^0 w = a^k b a^n$  mit  $k = n - |v| < n$  ist kein Palindrom. Widerspruch.  $\square$

# Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

## Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind. Die Sprache  $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$  ist eine solche Sprache.

## Beweis

1. Wir zeigen, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft hat.

Wir wählen  $n = 1$ .

Sei  $z \in L$  ein Wort mit  $|z| \geq n$ .

Wenn  $z \in \{b, c\}^*$ , zerlege  $z = uvw$  mit  $u = \varepsilon$ ,  $v$  dem ersten Symbol von  $z$  und  $w$  dem  $n - 1$ -Zeichen langen Suffix von  $z$ . Offensichtlich gilt  $|v| \geq 1$ ,  $|uv| \leq n$  und  $uv^i w \in \{b, c\}^* \subseteq L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

Wenn  $z$  von der Form  $a^j b^k c^k$  ist und  $z \notin \{b, c\}^*$ , dann muss  $j > 0$  gelten und wir zerlegen  $z = uvw$  mit  $u = \varepsilon$ ,  $v = a$ ,  $w = a^{j-1} b^k c^k$ . Da  $|v| = 1$ ,  $|uv| \leq n$  und  $uv^i w = a^{j+i-1} b^k c^k \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , hat  $L$  die Pumping-Eigenschaft.

# Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

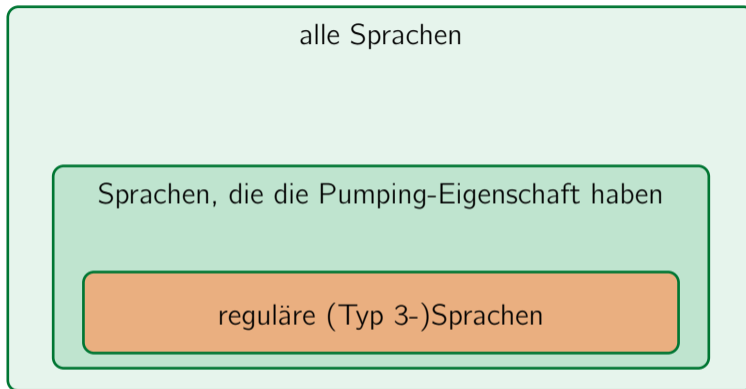
## Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind.  
Die Sprache  $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$  ist eine solche Sprache.

## Beweis (Fortsetzung)

2. Mit einer Methode, die in der nächsten Vorlesung (nur FSK) folgt, können wir beweisen, dass  $L$  nicht regulär ist. □

# Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend



Wichtige Konsequenz:

- ▶ Das Pumping-Lemma kann **nicht** verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

# Zusammenfassung vom Pumping-Lemma

---

Bezug zu Regularität:

- ▶ Das Pumping-Lemma gibt **eine notwendige Bedingung** für reguläre Sprachen.  
Sehr informell: *Wörter einer regulären Sprache können an einer Stelle aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.*
- ▶ Das Pumping-Lemma gibt **keine hinreichende Bedingung** für reguläre Sprachen, d.h. Regularität kann **nicht** mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.

Anwendung:

- ▶  $L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** regulär
- ▶ Dies funktioniert nicht für jede nicht reguläre Sprache.