

3c

**Nichtdeterministische endliche Automaten
mit ϵ -Übergängen**

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 22. April 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



NFAs mit ε -Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ▶ ε -Übergänge erlauben Zustandswechsel **ohne Lesen eines Zeichens**.
Es wird sozusagen ε gelesen.

- ▶ Im Zustandsgraphen erlaubt: A diagram showing two states, z_1 and z_2 , represented as blue circles. A blue arrow points from z_1 to z_2 , with the Greek letter ε written above the arrow.

- ▶ Technisch:

- ▶ Ein **NFA ohne ε -Übergänge** hat $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$.
 - ▶ Ein **NFA mit ε -Übergängen** hat $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$.
- ▶ Die Ausdruckskraft ändert sich mit ε -Übergängen nicht.
- ▶ ε -Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

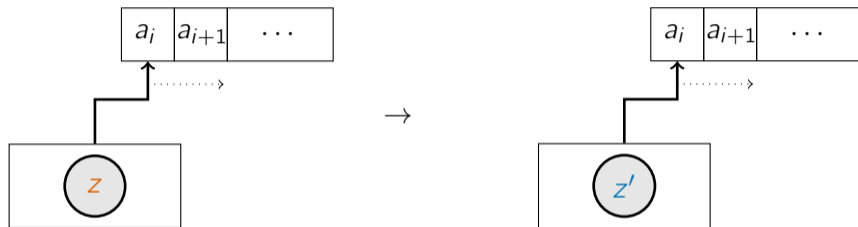
Definition eines NFA mit ε -Übergängen

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit ε -Übergängen (NFA mit ε -Übergängen) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei

- ▶ Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- ▶ Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- ▶ $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ ist die Überföhrungsfunktion
- ▶ $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände
- ▶ $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

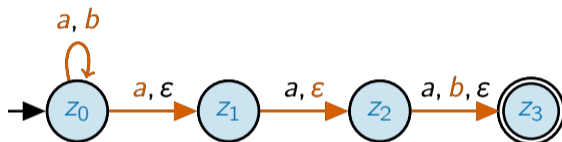
Illustration eines Zustandsübergangs mit ϵ



$z' \in \delta(z, \epsilon)$ bedeutet:

Im Zustand z darf der Automat in z' wechseln, ohne dass der Lesekopf sich bewegt.

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *baab*

Die ε -Hülle fügt für einen Zustand alle durch ε -Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

Definition

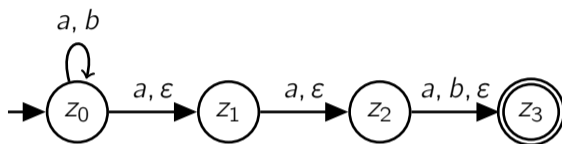
Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε -Übergängen.

Die ε -Hülle $\varepsilon\text{-Hülle}(z)$ eines Zustands $z \in Z$ ist definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche erfüllt:

1. $z \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$.
2. Wenn $z' \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$ und $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$, dann ist auch $z'' \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$.

Für eine Menge $X \subseteq Z$ definieren wir $\varepsilon\text{-Hülle}(X) := \bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(z)$.

Beispiel für die ε -Hülle



$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_1) = \{z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_2) = \{z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_3) = \{z_3\}$$

Akzeptanz bei NFAs mit ε -Übergängen

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε -Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε -Übergängen.

Wir definieren $\tilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \tilde{\delta}(X, aw) &:= \tilde{\delta}\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-H\u00fclle}(\delta(z, a)), w\right)\end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist


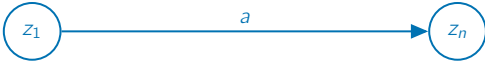
$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(\varepsilon\text{-H\u00fclle}(S), w) \cap E \neq \emptyset\}$$

Entfernen von ϵ -Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form  den Zustand z_n als Startzustand:

den Zustand z_n als Startzustand: 

2. Füge für jeden Pfad von der Form  einen Übergang  hinzu.

3. Entferne alle ϵ -Übergänge.

Sprache von NFAs mit ε -Übergängen

Satz

NFAs mit ε -Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

⊇ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache L von einem NFA mit ε -Übergängen akzeptiert wird.

L wird von einem NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ohne ε -Übergänge akzeptiert. Sei $M' = (Z, \Sigma, \delta', S, E)$ ein NFA mit ε -Übergängen, wobei

$$\begin{aligned}\delta'(z, a) &:= \delta(z, a) \quad \text{für } a \in \Sigma \\ \delta'(z, \varepsilon) &:= \emptyset\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $L(M') = L(M) = L$.

Sprache von NFAs mit ε -Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

⊆ Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε -Übergängen.

Wir zeigen, dass $L(M)$ ist regulär.

Wir konstruieren einen NFA M' ohne ε -Übergänge mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M')$ regulär, daher ist auch $L(M)$ regulär.

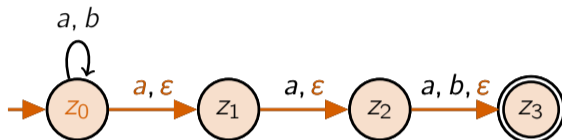
Sei $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit

$$S' := \varepsilon\text{-Hülle}(S)$$

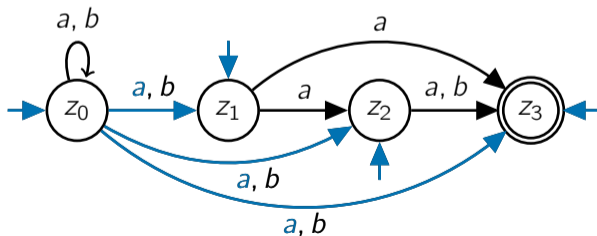
$$\delta'(z, a) := \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a))$$

Beispiel für die Elimination von ϵ -Übergängen

NFA M mit ϵ -Übergängen:



NFA M' ohne ϵ -Übergänge:



Sprache von NFAs mit ε -Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

$w \in L(M')$
g.d.w. $\tilde{\delta}'(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. $\tilde{\delta}(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$ (weil $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$)

g.d.w. $w \in L(M)$

Sprache von NFAs mit ε -Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$, d.h. $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w .

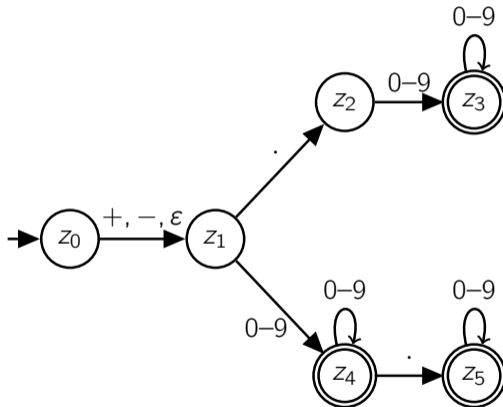
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- ▶ Fall $w = \varepsilon$: $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- ▶ Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$.

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}'(X, aw') \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \tilde{\delta}', \text{ für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(Def. } \delta') \\ = & \tilde{\delta}\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(IH)} \\ = & \tilde{\delta}(X, aw') && \text{(Def. } \tilde{\delta}, \text{ für NFA mit } \varepsilon\text{-Übergängen)} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA mit ϵ -Übergängen

Konstruiere einen NFA mit ϵ -Übergängen über $\{+, -, ., 0, \dots, 9\}$, der alle Wörter akzeptiert, die Gleitkommazahlen darstellen (z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):

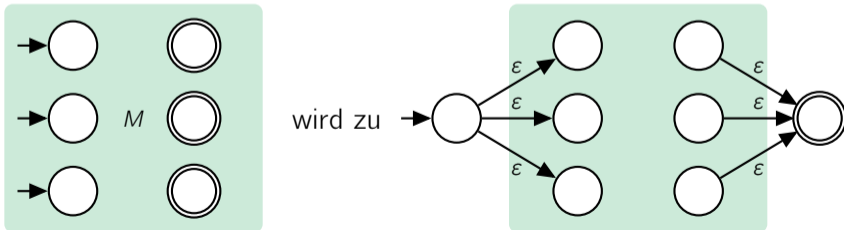


Eindeutige Start- und Endzustände

Satz

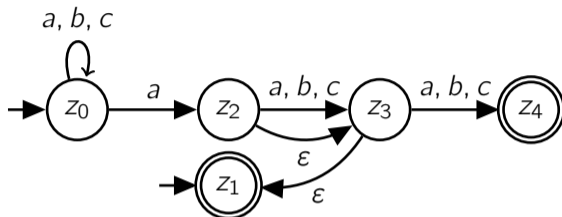
Für jeden NFA M mit ε -Übergängen gibt es einen NFA M' mit ε -Übergängen, sodass $L(M') = L(M)$ und M' genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

Beweis Konstruiere M' aus M , durch Hinzufügen eines neuen Start- und eines neuen Endzustands mit ε -Übergängen:

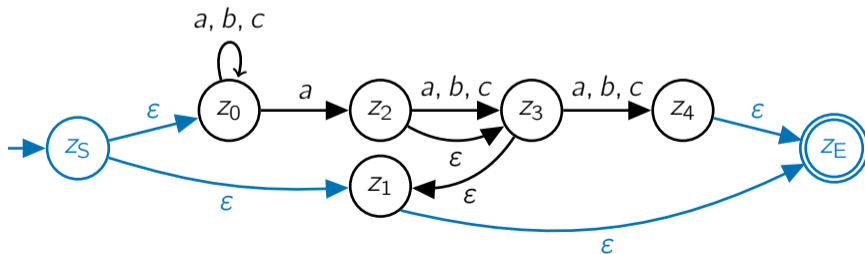


□

Beispiel für eindeutige Start- und Endzustände



wird zu



Christopher Schaffner hat ein Web-Tool zum Üben und Anschauen entwickelt:

chrisschaffner.github.io/graphicalInterfaceForGrammars/