

## 3b

# Determinisierung von endlichen Automaten

PD Dr. Jan Johannsen

Institut für Informatik

Stand: 22. April 2026

Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel und Prof. Dr. Jasmin Blanchette



# Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

## Theorem

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

**Beweis** Da  $L$  regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  (mit 1. Sonderregel), sodass  $L(G) = L$ .

Wir werden einen NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ .

Sei  $z_E \notin V$ . Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$  der NFA mit  $Z := V \cup \{z_E\}$  und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \\ \cup \{z_E \mid A \rightarrow a \in P\}$$

$$\delta(z_E, a) := \emptyset$$

## Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $V = \{S, A, B, C\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & B \rightarrow aC \mid bC \mid cC, \\ & C \rightarrow a \mid b \mid c\}\end{aligned}$$

Ableitung des Wortes  $bac a$ :

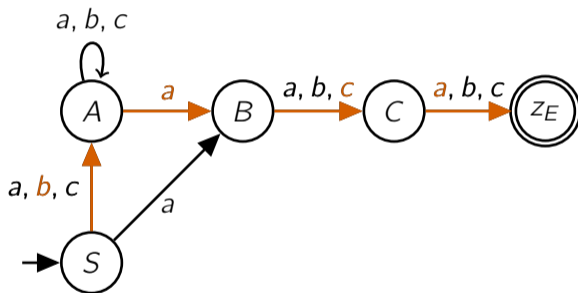
$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow bac a \in L(G)$$

NFA zu  $G$ :  $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$  mit

$$\begin{array}{lllll} \delta(S, a) = \{A, B\} & \delta(A, a) = \{A, B\} & \delta(B, a) = \{C\} & \delta(C, a) = \{z_E\} & \delta(z_E, a) = \emptyset \\ \delta(S, b) = \{A\} & \delta(A, b) = \{A\} & \delta(B, b) = \{C\} & \delta(C, b) = \{z_E\} & \delta(z_E, b) = \emptyset \\ \delta(S, c) = \{A\} & \delta(A, c) = \{A\} & \delta(B, c) = \{C\} & \delta(C, c) = \{z_E\} & \delta(z_E, c) = \emptyset \end{array}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Zustandsgraph zu  $M$ :



Eingabe:  $baca \in L(M)$

# Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

## Theorem

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen, dass  $L(M) = L(G)$ ,

d.h.  $w \in L(M)$  g.d.w.  $w \in L(G)$  für ein beliebiges  $w$ .

► Fall  $w = \varepsilon$ :  $\varepsilon \in L(M)$  g.d.w.  $S \in E$  g.d.w.  $S \rightarrow \varepsilon \in P$  g.d.w.  $\varepsilon \in L(G)$ .

► Fall  $w = a_1 \cdots a_n$  mit  $n > 0$ :

$a_1 \cdots a_n \in L(M)$

g.d.w. es gibt einen Lauf  $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände  $A_1, \dots, A_{n-1}$  mit  $A_1 \in \delta(S, a_1)$ ,  $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$   
für  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  und  $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

g.d.w.  $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

g.d.w.  $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Daher gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L(G) = L$ . □

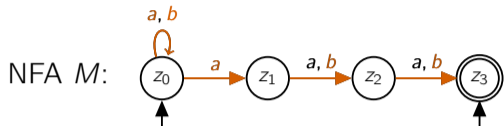
## Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

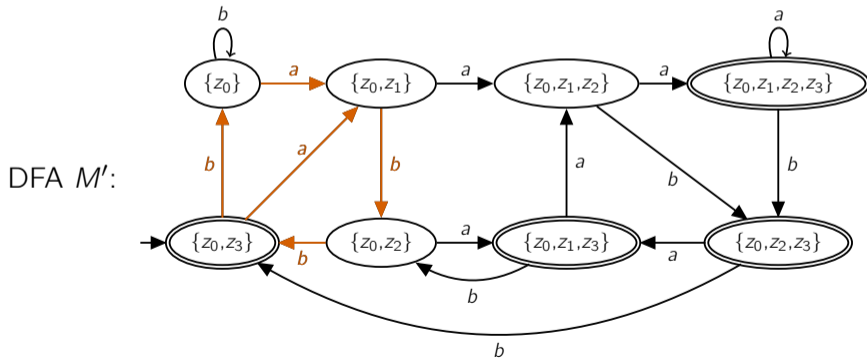
Der Beweis basiert auf der [Potenzmengenkonstruktion](#):

- ▶ Konstruiere für einen gegebenen NFA  $M$  einen DFA  $M'$ , sodass sich der DFA **alle** Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte.
- ▶ Jede Teilmenge von Zuständen des NFA wird zu einem Zustand des DFA.
- ▶ Da  $Z$  endlich ist, gibt es nur endlich viele Teilmengen.

# Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



Eingabe:  $babbabb \in L(M)$   
 $\in L(M')$



# Potenzmengenkonstruktion

Für den NFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  definieren wir den DFA  $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$  mit

▶  $Z' := \mathcal{P}(Z)$

*Die Zustandsmenge ist die Potenzmenge von  $Z$ .*

▶  $S' := S$

*Der Startzustand ist die Menge  $S$  aller Startzustände von  $M$ .*

▶  $E' := \{X \in Z' \mid E \cap X \neq \emptyset\}$

*Jede Menge, die mindestens einen Endzustand von  $M$  enthält, ist Endzustand.*

▶  $\delta'(X, a) := (\bigcup_{z \in X} \delta(z, a)) = \tilde{\delta}(X, a)$

*Die Übergangsfunktion berechnet alle von einem Zustand in  $X$  aus über  $a$  erreichbaren Zustände.*

## Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

**Beweis** Wir zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ ,  
d.h.  $w \in L(M)$  g.d.w.  $w \in L(M')$  für ein beliebiges  $w$ .

► Fall  $w = \varepsilon$ :  $\varepsilon \in L(M)$  g.d.w.  $S \cap E \neq \emptyset$  g.d.w.  $S \in E'$  g.d.w.  $\varepsilon \in L(M')$ .

# NFAs in DFAs transformieren

## Beweis (Fortsetzung)

- ▶ Fall  $w = a_1 \cdots a_n$  mit  $n > 0$ :

Zu zeigen:  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$  g.d.w.  $a_1 \cdots a_n \in L(M')$ .

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w.  $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt  $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$  mit  $(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)) = Z_1$ ,

$$(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)) = Z_i \text{ für } i \in \{2, \dots, n\} \text{ und } Z_n \cap E \neq \emptyset$$

g.d.w. es gibt  $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$  mit  $\delta'(S, a_1) = Z_1$ ,

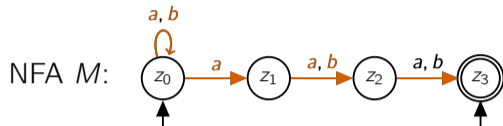
$$\delta'(Z_{i-1}, a_i) = Z_i \text{ für } i \in \{2, \dots, n\} \text{ und } Z_n \cap E \neq \emptyset$$

g.d.w.  $\tilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E'$

g.d.w.  $a_1 \cdots a_n \in L(M')$



# Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



DFA  $M'$ :

# Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

## Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

## Beweis

$\supseteq$  Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA, der sie erkennt.

Das folgt aus:

- ▶ Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .
- ▶ Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

$\subseteq$  Die akzeptierte Sprache eines DFA bzw. NFA ist regulär.

Das folgt aus:

- ▶ Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.
- ▶ Sei  $M$  ein DFA. Dann ist  $L(M)$  regulär. □

## Größe des DFA vs. NFA

---

- ▶ Sei ein NFA mit  $n$  Zuständen.
- ▶ Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat  $2^n$  Zustände.  
Der Platz explodiert uns.
- ▶ Geht es besser? Nicht wirklich.

# Größe des DFA vs. NFA

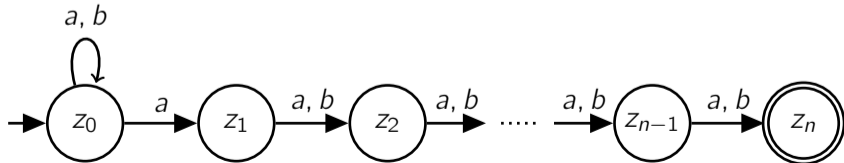
## Lemma

Sei  $L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$  für  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$   
(d.h. die Sprache aller Wörter aus  $\Sigma^*$ , die an  $n$ -letzter Stelle ein  $a$  haben).

1. Es gibt einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$  und  $M$  hat  $n + 1$  Zustände.
2. Jeder DFA  $M'$  mit  $L(M') = L$  hat mindestens  $2^n$  Zustände.

## Beweis

1. Sei  $M$  der folgende NFA:



## Beweis (Fortsetzung)

### 2. Durch Widerspruch.

Wir nehmen an, es gibt einen DFA  $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  mit  $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$  und  $|Z| < 2^n$ .

Die Menge  $\Sigma^n$  enthält  $2^n$  Wörter der Länge  $n$  und da  $|Z| < 2^n$ , muss es  $w, w' \in \Sigma^n$  geben mit  $w \neq w'$  und  $\tilde{\delta}(z_0, w) = \tilde{\delta}(z_0, w') = z$ .

Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$  die erste Position, an der sich  $w$  und  $w'$  unterscheiden.

$w$  ist von der Form  $uav$  und  $w'$  ist von der Form  $ubv'$  (oder umgekehrt) mit  $|v| = |v'| = n - j$ . Da  $\tilde{\delta}(z_0, uav) = \tilde{\delta}(z_0, ubv') = z$ , muss dann gelten  $\tilde{\delta}(z_0, uavb^{j-1}) = \tilde{\delta}(z_0, ubv'b^{j-1}) = z'$  für einen Zustand  $z'$ .

Aber  $uavb^{j-1} \in L$  und  $ubv'b^{j-1} \notin L$ , daher  $z' \in E$  und  $z' \notin E$ . Widerspruch.  $\square$

# Beispiel wenn $n = 2$

