

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 10 zur
Vorlesung

Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Klausurvorbereitung TIMI-10-K

- a) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist unentscheidbar. Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit, indem sie H_0 darauf reduzieren.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei P die Menge der Turingmaschinen M (binär kodiert), für die $L(M) \neq \emptyset$ ist. Wir zeigen: $H_0 \leq P$ und somit ist P unentscheidbar.

Um $H_0 \leq P$ zu zeigen, definieren wir die Funktion f , die die (binär kodierte) Turingmaschine M auf eine (binär kodierte) Turingmaschine M' abbildet. Dabei verhält sich M' wie folgt: Ist die Eingabe nicht das leere Wort, so akzeptiert M' nicht. Ist die Eingabe das leere Wort, so simuliert M' zunächst M auf dem leeren Wort und akzeptiert dann (sofern M gehalten hat). M' akzeptiert also höchstens das leere Wort, und das genau dann wenn M das leere Wort akzeptiert. Die Funktion ist offensichtlich total und berechenbar.

Somit gilt:

$$\begin{aligned} M &\in H_0 \\ \Rightarrow M &\text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow M' &\text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow \varepsilon &\in L(M') \\ \Rightarrow L(M') &\neq \emptyset \\ \Rightarrow f(M) &\in P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M &\notin H_0 \\ \Rightarrow M &\text{ hält nicht auf } \varepsilon \\ \Rightarrow M' &\text{ hält auf keiner Eingabe} \\ \Rightarrow L(M') &= \emptyset \\ \Rightarrow f(M) &\notin P \end{aligned}$$

