

PD Dr. Jan Johannsen
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 18.06.2026 bis 22.06.2026
Abgabe bis 30.06.2026, 14:00 Uhr

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 8 zur
Vorlesung

Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Klausurvorbereitung TIMI-8-K

Die kontextfreien Sprachen sind unter kleeneschem Abschluss, Produkt und Vereinigung mit kontextfreien Sprachen, sowie unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen.

Zeigen Sie mithilfe dieser Abschlusseigenschaften, dass die Sprache

$$L_1 = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w) + 1\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht kontextfrei ist. Sie dürfen annehmen, dass die Sprache $L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ nicht kontextfrei ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Widerspruchsbeweis: Nimm an, dass L_1 kontextfrei ist. Wir definieren die Sprache

$$L'_1 = L(a^* b^* c^*) \cap L_1 = \{a^n b^n c^{n-1} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

L'_1 ist kontextfrei, denn $L(a^* b^* c^*)$ ist eine reguläre Sprache, da sie von einem regulären Ausdruck erzeugt wird, und die kontextfreien Sprachen sind unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen.

Nun definieren wir

$$L''_1 = L'_1 \cdot \{c\} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

L''_1 ist kontextfrei, denn $\{c\}$ ist regulär und damit kontextfrei und die kontextfreien Sprachen sind unter Produkt abgeschlossen.

Allerdings wissen wir, dass $L''_1 = L_2$ nicht kontextfrei ist. Die Annahme, dass L_1 kontextfrei sei, führt somit zu einem Widerspruch.