

Lösungsvorschlag zur Übung 11 zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

TIMI11-1 Satz von Rice

Sei $M = (Z, \{a, b\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine deterministische Turingmaschine. Welche der folgenden Fragestellungen zu M sind entscheidbar?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit unentscheidbarer Fragestellungen mittels des Satzes von Rice. Bei entscheidbaren Fragestellungen erläutern Sie, wie die charakteristische Funktion berechnet wird.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wiederholung:

Satz von Rice: Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$C(\mathcal{S}) = \{w_M \mid \text{die von } M \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

- a) Die Funktion die von M berechnet wird hat mindestens 3 Fixpunkte. Ein Fixpunkt einer Funktion $f : D \rightarrow D$ ist ein $x \in D$, sodass $f(x) = x$.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Das Problem ist unentscheidbar:

Sei

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid \exists x, y, z. x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge f(x) = x \wedge f(y) = y \wedge f(z) = z\},$$

also die Menge aller berechenbarer Funktionen die mindestens drei Fixpunkte haben.

Dann liegt die Funktion $f(x) = x$ in $\mathcal{S}$, da sie unendlich viele Fixpunkte hat, aber die Funktion $f(x) = x^2$ nicht, da sie nur zwei Fixpunkte hat (0 und 1).

Damit ist $\mathcal{S}$ nicht leer und auch nicht die Menge aller berechenbaren Funktionen.

Mit dem Satz von Rice ist

$$C(\mathcal{S}) = \{w_M \mid \text{Die von } M \text{ berechnete Funktion hat mindestens drei Fixpunkte}\}$$

unentscheidbar.

- b) Totalitätsproblem: Es gibt ein Wort $w \notin L(M)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Das Problem ist unentscheidbar:

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Funktionen, die an mindestens einer Stelle nicht definiert sind.

Dann liegt die Funktion Ω die überall undefiniert ist in $\mathcal{S}$, aber die Funktion $f(x) = x$ nicht.

$\mathcal{S}$ ist damit nicht leer und auch nicht die Menge aller berechenbaren Funktionen.

Dann ist $C(\mathcal{S}) = \{w_M \mid M \text{ akzeptiert mindestens für eine Eingabe nicht}\}$.

Mit dem Satz von Rice ist $C(\mathcal{S})$ unentscheidbar und damit ist das Totalitätsproblem (also ob eine Turingmaschine mindestens ein Wort nicht akzeptiert) unentscheidbar.

- c) Hat M einen Müllzustand? Formal definieren wir einen Müllzustand hier als einen Zustand z , der kein Endzustand ist und für den gilt $\delta(z, a) \subseteq \{z\}$ für alle a .

LÖSUNGSVORSCHLAG: Das Problem ist entscheidbar. Prüfe für alle Zustände, die keine Endzustände sind, die Übergänge für alle (endlich vielen) Eingabesymbole. Wenn keiner der Übergänge zu einem anderen Zustand führt beende und gib Wahr zurück, sonst gib nach Prüfen aller Nicht-Endzustände Falsch zurück.

- d) M terminiert auf jeder Eingabe nach zwischen 50 und 55 Schritten.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Das Problem ist entscheidbar. Simuliere M für bis zu 55 Schritten auf allen Eingaben mit einer Länge kleiner oder gleich 55 und falls M vor 50 Schritten terminiert oder nach 55 Schritten nicht terminiert gib Falsch zurück, sonst gib nach Prüfen aller (endlich vieler) Optionen Wahr zurück.

TIMI11-2 Beweise prüfen

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir jeweils einen Beweis, der einen Fehler enthält. Identifizieren Sie diesen Fehler (mit kurzer Begründung).

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache

$$D = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

ist semi-entscheidbar.

Beweis:

D ist semi-entscheidbar. Um das zu zeigen, konstruieren wir eine DTM M , die D semi-entscheidet. Das heißt, dass M für alle Eingaben $w \in D$ hält und für alle Eingaben $w \notin D$ nicht hält.

Angenommen, es gäbe so eine Turingmaschine M . Betrachte ein Wort $w \in \{0,1\}^*$.

- Wenn $w \in D$ ist, dann akzeptiert M_w die Eingabe w . Somit akzeptiert auch M das Wort w .
- Wenn $w \notin D$ ist, dann hält M_w mit Eingabe w nicht. Somit akzeptiert auch M das Wort w nicht.

M semi-entscheidet also D .

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Der Beweis enthält zwei Fehler:

- $w \in D$ bedeutet, dass M_w die Eingabe w *nicht* akzeptiert. Die Lösung geht in den zwei Stichpunkten aber davon aus, dass $w \in D$ das Gegenteil bedeutet.
- Selbst wenn wir diesen Fehler beheben, nimmt die Lösung an, dass ein M mit der gewünschten Eigenschaft existiert, aber wir haben das nie gezeigt. Der Beweis ist also zirkulär: „Unter der Annahme, dass M existiert, existiert M .“

Tatsächlich ist D nicht semi-entscheidbar, d.h. die Aussage ist falsch. Intuition: Die einzige Möglichkeit, zu testen, ob M_w das Wort w nicht akzeptiert, ist, M_w auf w auszuführen. Wenn M_w dann beliebig lange läuft, kann man nie sagen, ob M_w noch halten (und damit akzeptieren) wird oder nicht.

b) Sei $L_u = \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } x \in L(M_w)\}$. Diese Sprache ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Zeigen Sie: Die Sprache $L_r = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist regulär}\}$ ist unentscheidbar.

Beweis:

Wir reduzieren L_u auf L_r . Da L_u unentscheidbar ist, folgt daraus, dass L_r unentscheidbar ist.

Sei $v \in \{0, 1, \#\}^*$. Wir definieren die Reduktionsfunktion f durch

$$f(v) = \begin{cases} w_{M_3} & \text{falls } v = w\#x \text{ und } M_w \text{ akzeptiert } x \\ w_{M_4} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist M_3 eine Turingmaschine, die die reguläre Sprache $\{0, 1\}^*$ akzeptiert. M_4 ist eine Turingmaschine, die die nichtreguläre Sprache $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert. w_{M_i} ist die Binärkodierung der jeweiligen Turingmaschine.

M_3 , M_4 und die Binärkodierungen sind offensichtlich berechenbar, also ist f berechenbar (und offensichtlich total). Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & v \in L_u \\ \text{g.d.w. } & v = w\#x \text{ und } x \in L(M_w) \\ \text{g.d.w. } & M_{f(v)} \text{ akzeptiert eine reguläre Sprache} \\ \text{g.d.w. } & f(v) \in L_r \end{aligned}$$

Somit ist f eine valide Reduktionsfunktion und $L_u \leq L_r$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Die Reduktionsfunktion f ist nicht berechenbar. Um zu entscheiden, ob $f(v) = w_{M_3}$ oder $f(v) = w_{M_4}$, müssen wir entscheiden, ob M_w das Wort x akzeptiert. Das ist aber bekanntermaßen unentscheidbar.