PD Dr. Jan Johannsen
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Besprechung 30.04.2026 bis 04.05.2026
Abgabe bis 12.05.2026, 14:00 Uhr

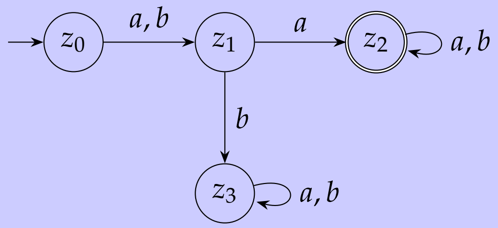
Lösungsvorschlag zur Übung 2 zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Wenn Sie Automaten angeben, tun Sie dies immer in Form eines Zustandsgraphen. Andere Formen der Darstellung (z.B. als Liste von Übergängen) werden nicht gewertet, da sie sehr viel aufwändiger zu korrigieren sind. Vergessen Sie nicht, im Zustandsgraphen Start- und Endzustände zu markieren.

TIMI2-1 ***DFAs und Minimierung*** Geben Sie DFAs an, die folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erkennen:

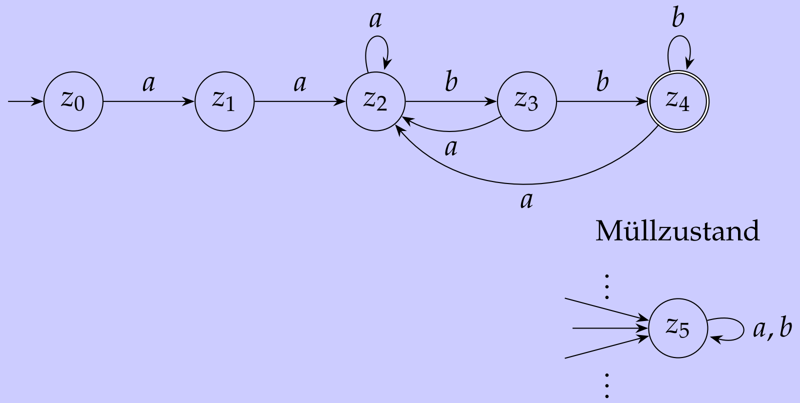
a) $L_1 = \{caw \mid c \in \Sigma,\ w \in \Sigma^*\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:



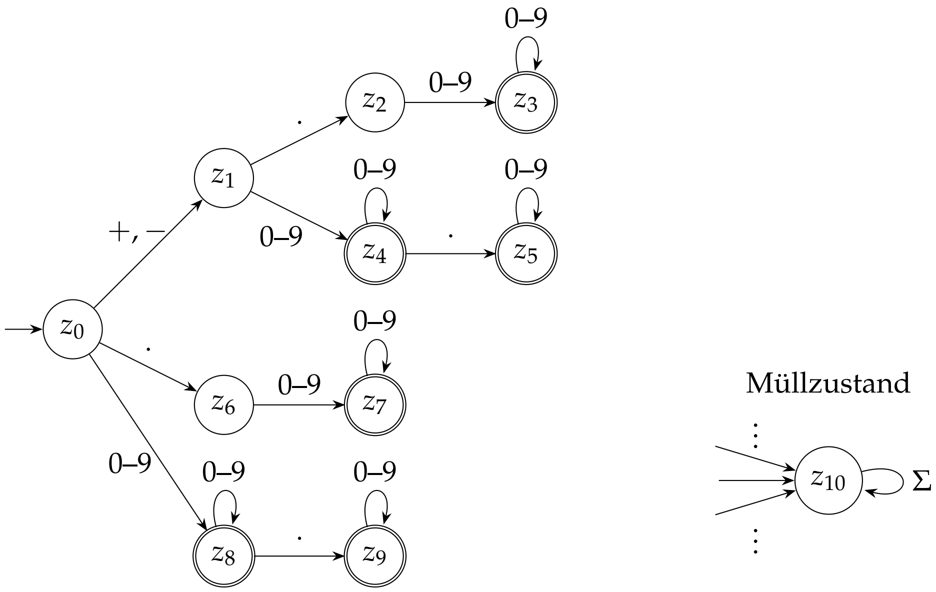
b) $L_2 = \{aawbb \mid w \in \Sigma^*\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:



c) Minimieren Sie die folgenden DFAs. Verwenden Sie die tabellarische Variante des Algorithmus zur Minimierung von DFAs aus der Vorlesung. Geben Sie die Partitionstabelle und den minimalen DFA an. (Das ermöglicht uns, Ihnen bei kleinen Fehlern noch Teilpunkte zu geben.)

i) DFA A_2 über dem Alphabet $\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$ (bekannt aus der Vorlesung):

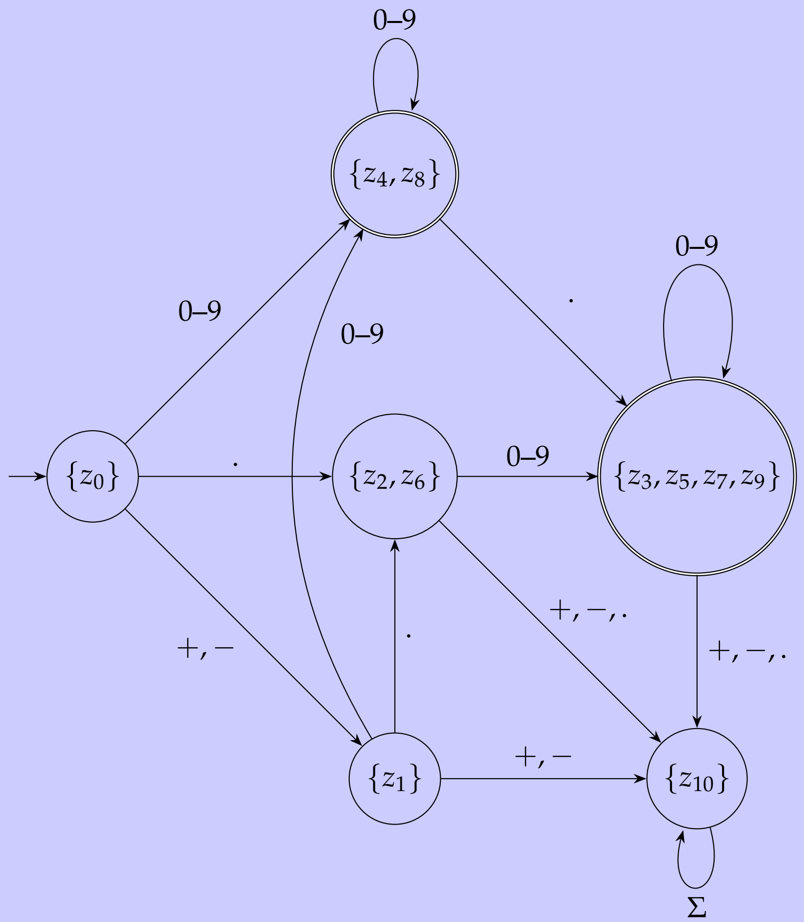


LÖSUNGSVORSCHLAG:
Partitionstabelle:

$$\begin{array}{l}
z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_6 \quad z_{10} \;\Big|\; z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_7 \quad z_8 \quad z_9 \\
z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_6 \;\Big|\; z_{10} \;\Big|\; z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_7 \quad z_8 \quad z_9 \quad \text{mit } 0 \\
z_0 \;\Big|\; z_1 \quad z_2 \quad z_6 \;\Big|\; z_{10} \;\Big|\; z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_7 \quad z_8 \quad z_9 \quad \text{mit } + \\
z_0 \;\Big|\; z_1 \;\Big|\; z_2 \quad z_6 \;\Big|\; z_{10} \;\Big|\; z_3 \quad z_5 \quad z_7 \quad z_9 \;\Big|\; z_4 \quad z_8 \quad \text{mit } .
\end{array}$$

Sie dürfen (und sollten vernünftigerweise) Mengen von Symbolen, die immer zusammen vorkommen, für diesen Algorithmus als ein Symbol betrachten. Beispielsweise müssen Sie bei dem gegebenen Automaten nicht separat prüfen, ob 0, 1, 2, …, 9 zu einer Partitionierung führen; es genügt, ein Symbol aus dieser Menge zu prüfen.

Aus der Partitionierung ergibt sich der Minimalautomat:



(In diesem Fall ist der ursprünliche Automat womöglich besser lesbar und verständlich als der Minimalautomat. Für viele Algorithmen und Beweise sind Minimalautomaten aber trotzdem wichtig.)

TIMI2-2 ***Kleine Automaten***

a) Sei A_1 ein DFA mit Alphabet Σ und genau einem Zustand. Zeigen oder widerlegen Sie: Es ist entweder $L(A_1) = \Sigma^*$ oder $L(A_1) = \emptyset$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Stimmt. Der Automat hat genau einen Zustand z_0 (der also auch Startzustand ist) und muss Übergänge $z_0 \xrightarrow{a} z_0$ für jedes $a \in \Sigma$ haben. Wenn z_0 ein Endzustand ist, akzeptiert A_1 somit jedes Wort in Σ^*. Wenn z_0 kein Endzuständ ist, akzeptiert A_1 kein Wort.

b) Zeigen Sie: Für jeden DFA A mit Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und genau vier Zuständen gilt: Wenn für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ das Wort $a^{n^2} \in L(A)$ ist, dann ist auch $a^{12} \in L(A)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
In A muss es mindestens eine Schleife aus a-Übergängen geben, da A beliebig lange a-Sequenzen erkennt, aber nur 4 Zustände hat.
Sei z_0 der Startzustand von A. Sei $z_w = \widetilde{\delta}(z_0, a^{12})$ der Zustand, in dem wir uns nach Lesen von a^{12} befinden. Dieser Zustand z_w muss Teil einer Schleife sein, da A nur 4 Zustände hat. Sei $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Länge dieser Schleife. Es gilt somit für jedes $k \in \mathbb{N}$: $\widetilde{\delta}(z_w, a^{ks}) = z_w$.
Wir zeigen, dass z_w ein Endzustand ist. Fallunterscheidung über s:

- Für $s = 1$ gilt $\widetilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \widetilde{\delta}(z_0, a^{12+4}) = \widetilde{\delta}(z_w, a^{4\cdot 1}) = z_w$
- Für $s = 2$ gilt $\widetilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \widetilde{\delta}(z_0, a^{12+4}) = \widetilde{\delta}(z_w, a^{2\cdot 2}) = z_w$
- Für $s = 3$ gilt $\widetilde{\delta}(z_0, a^{6^2}) = \widetilde{\delta}(z_0, a^{12+24}) = \widetilde{\delta}(z_w, a^{8\cdot 3}) = z_w$
- Für $s = 4$ gilt $\widetilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \widetilde{\delta}(z_0, a^{12+4}) = \widetilde{\delta}(z_w, a^{1\cdot 4}) = z_w$

In allen Fällen gibt es also ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\widetilde{\delta}(z_0, a^{n^2}) = z_w$, sodass z_w ein Endzustand sein muss. Damit ist $a^{12} \in L(A)$. (Übrigens ist 12 die kleinste Nicht-Quadratzahl mit dieser Eigenschaft.)