

## Übung 0 zur Vorlesung Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

**Hinweis:** Dieses Blatt wird nicht abgegeben, aber es wird in den Übungen von 16.04.2026 bis 20.04.2026 besprochen.

### TIMI0-1 Wörter, Sprachen

- a) Betrachten Sie die Alphabete  $\Sigma_1 = \{a, b, c, d\}$  und  $\Sigma_2 = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ . Geben Sie jeweils drei Wörter über  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  an.
- b) Betrachten Sie die Sprachen  $U = \{aab, baa\}$  und  $V = \{aa, bb\}$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ .

Für eine Sprache  $L$  bezeichnen wir mit  $L^*$  die Menge aller Wörter, die durch beliebige Konkatenationen aus Wörtern der Sprache  $L$  gebildet werden können, wobei das leere Wort  $\varepsilon$  inbegriffen ist. Geben Sie Wörter  $u, v, w, x$  über  $\Sigma$  an, sodass

- $u \in U^*$  und  $u \notin V^*$ ;
  - $v \notin U^*$  und  $v \in V^*$ ;
  - $w \in U^*$  und  $w \in V^*$ ;
  - $x \notin U^*$  und  $x \notin V^*$ .
- c) Sei  $w = ababababbbbcbaaaaaabacaabbbbbbaba$ .
- Geben Sie alle Teilwörter  $v$  von  $w$  an, auf die **alle** der folgenden Eigenschaften zutreffen:
- $|v| = 4$ , die Länge von  $v$  ist 4;
  - $v[1] = a$ , das erste Symbol in  $v$  ist  $a$ ;
  - $\#_b(v) > 0$ , die Anzahl von Vorkommnissen von  $b$  in  $v$  ist größer als 0.

### TIMI0-2 Fundamentale Beweisstrategien

In dieser Aufgabe diskutieren wir fundamentale Beweisstrategien. Diese Strategien sollten aus anderen Kursen bekannt sein, aber da TIMI sehr beweislustig ist, wiederholen wir sie hier.

- a) Die folgende Tabelle fasst zusammen, wie man mit Aussagen, die bestimmte logische Operationen enthalten, umgeht.

	Um eine Aussage dieser Form zu beweisen...	Wenn eine Aussage dieser Form angenommen wird...
$P \wedge Q$	beweise sowohl $P$ als auch $Q$	nimm $P$ und $Q$ an
$P \vee Q$	beweise entweder $P$ oder $Q$	beweise die gewünschte Aussage sowohl unter der Annahme $P$ als auch unter der Annahme $Q$ (Fallunterscheidung)
$P \implies Q$	beweise, dass unter der Annahme $P$ $Q$ folgt	beweise $P$ und nimm dann $Q$ an
$\neg P$	beweise, dass unter der Annahme $P$ ein Widerspruch folgt	beweise $P$ , um einen Widerspruch herzuleiten
$\forall x, P(x)$	beweise, dass $P(a)$ für ein beliebiges $a$ gilt	nimm $P(a)$ für jedes konkrete $a$ an
$\exists x, P(x)$	gib ein konkretes $a$ an und beweise $P(a)$	nimm ein beliebiges $a$ an, für das $P(a)$ gilt

Die Biimplikation  $P \iff Q$  („ $P$  genau dann wenn  $Q$ “ oder „ $P$  g.d.w.  $Q$ “) ist definiert als  $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ .

Außerdem kann man, unabhängig von der zu beweisenden Aussage, immer folgende Regeln anwenden:

- Widerspruchsbeweis: um  $P$  zu beweisen nimm an, dass  $\neg P$  gilt, und leite daraus einen Widerspruch ab.
- Satz vom ausgeschlossenen Dritten: für jede beliebige Aussage  $P$  nimm  $P \vee \neg P$  an.

Häufig nützlich sind auch folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\iff \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\iff \neg A \wedge \neg B \\ \neg\forall x, P(x) &\iff \exists x, \neg P(x) \\ \neg\exists x, P(x) &\iff \forall x, \neg P(x) \\ A \wedge (B \vee C) &\iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x)) &\iff \forall x, P(x) \wedge Q(x) \\ (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x)) &\iff \exists x, P(x) \vee Q(x) \\ \neg\neg A &\iff A \end{aligned}$$

- i) Zeigen Sie:  $(\forall n, \exists k, k > n) \iff (\neg \exists n, \forall k, n \geq k)$
- ii) Für alle Sprachen  $A, B, C$  über einem Alphabet  $\Sigma$  gilt:  $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$ .
- iii) Gilt die Aussage  $\forall n, \exists k, k > n$
- für  $n, k \in \mathbb{N}$ ?
  - für  $n, k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , wobei  $\infty > x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ?
- Beweisen Sie Ihre Antworten.

b) Die Gleichheit von Mengen ist wie folgt definiert:

$$S \subseteq T \text{ g.d.w. } \forall x, x \in S \implies x \in T$$

$$S = T \text{ g.d.w. } S \subseteq T \wedge T \subseteq S$$

Zeigen Sie:

- i) Für alle Mengen  $S$  und  $T$  gilt:  $S = T$  g.d.w.  $\forall x, x \in S \iff x \in T$ .
- c) Die Konkatenation  $v \cdot w$  (alternativ  $vw$ ) zweier Wörter über einem Alphabet  $\Sigma$  ist rekursiv definiert durch

$$\varepsilon \cdot w = w$$

$$av \cdot w = a(v \cdot w)$$

Alternativ kann man diese Definition auch so schreiben:

$$v \cdot w = \begin{cases} w & \text{falls } v = \varepsilon \\ a(v' \cdot w) & \text{falls } v = av' \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle Wörter  $u, v, w$  gilt:  $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$ . Verwenden Sie vollständige Induktion (siehe Skript, Kapitel 2) über die Länge von  $u$ .

### TIMIO-3 Äquivalenzrelationen

Eine Relation zwischen zwei Mengen  $M, N$  ist eine Menge  $R \subseteq M \times N$  von Paaren bestehend je aus einem Element aus  $M$  und einem aus  $N$ .  $M$  und  $N$  können hierbei beliebige Mengen sein. Ist  $(p, q) \in R$ , so schreibt man auch  $R(p, q)$ ,  $pRq$  oder  $p \sim_R q$ .

Ist klar, um welche Relation es sich handelt, kann man auch  $p \sim q$  schreiben.

Eine Relation  $R$  heißt Äquivalenzrelation, wenn

- die zugrundeliegenden Mengen gleich sind:  $M = N$ ;
- für alle  $x \in M$  gilt  $xRx$  (d.h.  $R$  ist reflexiv);

- für alle  $x, y \in M$  gilt  $xRy \implies yRx$  (d.h.  $R$  ist symmetrisch);
- für alle  $x, y, z \in M$  gilt  $xRy \wedge yRz \implies xRz$  (d.h.  $R$  ist transitiv).

Eine Äquivalenzklasse  $K$  einer Äquivalenzrelation  $R$  ist eine maximale Menge von Elementen  $u, v, w, \dots \in M$  sodass alle Elemente von  $K$  durch  $R$  in Beziehung stehen:  $uRv$ ,  $uRw$ ,  $vRu$ ,  $vRw$ , etc. „Maximal“ bedeutet, dass es kein Element  $x \in M$  gibt, das nicht in  $K$  ist, aber mit allen Elementen von  $K$  in Beziehung steht. Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beispiel: Die Relation

$$\{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \text{ geteilt durch } 3 \text{ hat denselben Rest wie } v \text{ geteilt durch } 3\}$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind  $\{0, 3, 6, \dots\}$ ,  $\{1, 4, 7, \dots\}$  und  $\{2, 5, 8, \dots\}$ . Sie hat somit Index 3.

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Berechnen Sie außerdem den Index von mindestens zwei der Äquivalenzrelationen.

- $R_1 \subseteq \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$  mit  $0R_11, 2R_13$  (und sonst  $\neg xR_1y$ ).
- $R_2 \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$  mit  $0R_20, 1R_21, 2R_22$  (und sonst  $\neg xR_2y$ ).
- $R_3 \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$  mit  $0R_30, 1R_31, 2R_32, 1R_32, 2R_31$  (und sonst  $\neg xR_3y$ ).
- $R_4 = \{(p, q) \mid \text{die Personen } p, q \text{ haben das gleiche Geburtsjahr}\}$ .