

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 12 zur
Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Klausurvorbereitung FSK-12-K

- a) Zeigen Sie, dass das Well-Liked-Clique-Problem (WLCP) $\mathcal{NP}$ -schwer ist, indem Sie das CLIQUE-Problem darauf reduzieren.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

$f(G, k) = (G', k + 1)$, wobei $(V, E)' = (V \cup \{v_{new}\}, E \cup \{(v, v_{new}) \mid v \in G\})$.
 f ist offensichtlich total und berechenbar.

Wir zeigen, dass $f(G, k) \in \text{CLIQUE} \Leftrightarrow f(G, k) \in \text{WLCP}$:

- sei $(G, k) \in \text{CLIQUE}$. Dann gibt es in G eine Clique C der Größe k . In G' bildet dann $C' = C \cup v_{new}$ eine Clique der Größe $k + 1$, da v_{new} mit allen Knoten in G' verbunden ist (also insbesondere auch mit allen Knoten in C). Zudem gibt es einen Knoten in C' , der mit allen Knoten in $G' \setminus C'$ verbunden ist, nämlich v_{new} .
- sei $(G, k) \notin \text{CLIQUE}$. Dann gibt es keine Clique der Größe k in G . In G' kann es also auch keine Clique der Größe $k + 1$ geben (denn es werden ja in der Konstruktion von G' nur Kanten zwischen v_{new} und einem anderen Knoten aus G hinzugefügt, nicht zwischen zwei Knoten aus G).

- b) Der folgende "Beweis" für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ enthält einen Fehler. Lokalisieren Sie den Fehler und geben Sie eine kurze Begründung, warum der Beweis falsch ist.

Das FRIENDS-Problem ist:

- gegeben: eine Menge an Personen Q und eine Menge von
Freundesgruppen $F \subseteq \mathcal{P}(Q)$, also wenn $g \in F$ und
 $x_1, \dots, x_n \in g$, dann sind alle x_i miteinander befreundet
gefragt: Gibt es eine Freundesgruppe mit Mindestgröße $m \in \mathbb{N}$?

Das FRIENDS-Problem ist in Polynomialzeit lösbar, indem F durchsucht und die Freundesgruppen nach ihrer Größe überprüft werden. Wir terminieren mit

Wahr, wenn wir eine Gruppe größer oder gleich m finden, und mit Falsch, wenn wir alle Gruppen überprüft haben. Also $\text{FRIENDS} \in \mathcal{P}$ (und auch $\mathcal{NP}$).

Gleichzeitig ist das FRIENDS-Problem $\mathcal{NP}$ -schwer, da wir CLIQUE auf es reduzieren können: Für Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion f welche diesen in eine Instanz von FRIENDS umwandelt mit $Q := V$, $F := \{V' \mid V' \text{ ist eine Clique in } G\}$, $m := k$. Offensichtlich hat F ein Element von mindestens Größe m g.d.w. G eine k -Clique hat.

Damit gilt sowohl $\text{FRIENDS} \in \mathcal{P}$ als auch FRIENDS ist $\mathcal{NP}$ -schwer, somit gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Der Beweis nimmt an, dass das Finden aller Cliquen V' in G (und damit von F) in Polynomialzeit berechenbar ist. Das ist falsch, daher ist die angegebene Reduktion keine Polynomialzeitreduktion und somit ist das kein Beweis für die $\mathcal{NP}$ -Schwere von FRIENDS.