

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 10 zur
Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Klausurvorbereitung FSK-10-K

- a) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist unentscheidbar. Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit, indem sie H_0 darauf reduzieren.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei P die Menge der Turingmaschinen M (binär kodiert), für die $L(M) \neq \emptyset$ ist. Wir zeigen: $H_0 \leq P$ und somit ist P unentscheidbar.

Um $H_0 \leq P$ zu zeigen, definieren wir die Funktion f , die die (binär kodierte) Turingmaschine M auf eine (binär kodierte) Turingmaschine M' abbildet. Dabei verhält sich M' wie folgt: Ist die Eingabe nicht das leere Wort, so akzeptiert M' nicht. Ist die Eingabe das leere Wort, so simuliert M' zunächst M auf dem leeren Wort und akzeptiert dann (sofern M gehalten hat). M' akzeptiert also höchstens das leere Wort, und das genau dann wenn M das leere Wort akzeptiert. Die Funktion ist offensichtlich total und berechenbar.

Somit gilt:

$$\begin{aligned} M &\in H_0 \\ \Rightarrow M &\text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow M' &\text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow \varepsilon &\in L(M') \\ \Rightarrow L(M') &\neq \emptyset \\ \Rightarrow f(M) &\in P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M &\notin H_0 \\ \Rightarrow M &\text{ hält nicht auf } \varepsilon \\ \Rightarrow M' &\text{ hält auf keiner Eingabe} \\ \Rightarrow L(M') &= \emptyset \\ \Rightarrow f(M) &\notin P \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion

$$\log: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad \log(x_1, x_2) = \log_{x_1} x_2$$

μ -rekursiv ist. Beachten Sie, dass der Logarithmus für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$\log(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Für $\log$ gilt:

$$\log(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2 \iff |x_1^n - x_2| = 0$$

Wir definieren also die primitiv rekursiv Funktion $\log'$:

$$\begin{aligned} \log'(n, x_1, x_2) &= \text{absdiff}(\exp(x_1, n), x_2) \\ &= \text{absdiff}(\exp(\pi_2^3(n, x_1, x_2), \pi_1^3(n, x_1, x_2)), \pi_3^3(n, x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Die Logarithmusfunktion ist dann

$$\log = \mu \log'$$