

Übung 10 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

Hinweis:

Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Bearbeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

FSK10-1 PCP-Varianten

- a) Wir betrachten das PCP4-Problem, eine Variante von PCP, bei der die Spielsteine aus vier Wörtern bestehen. Eine Instanz von PCP4 ist also eine endliche Folge von 4-Tupeln $(x_1, y_1, z_1, u_1), \dots, (x_n, y_n, z_n, u_n)$ mit $x_i, y_i, z_i, u_i \in \Sigma^+$ für $i = 1, \dots, n$. Eine Lösung der Instanz K ist ähnlich zu PCP eine endliche Folge von Indizes $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m} = z_{i_1} \cdots z_{i_m} = u_{i_1} \cdots u_{i_m}$. Sind die folgenden Instanzen K_1, K_2 von PCP4 lösbar? Wenn ja, geben Sie eine Lösung (also eine geeignete Folge von Indizes) an. Wenn nein, beweisen Sie, dass die Instanz keine Lösung hat.

$$K_1 = \left(\begin{bmatrix} bbc \\ bca \\ cab \\ bbca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \\ abb \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} cca \\ ca \\ a \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ bcc \\ ccc \\ bcc \end{bmatrix} \right)$$
$$K_2 = \left(\begin{bmatrix} c \\ b \\ bab \\ cc \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} acb \\ baa \\ aaa \\ acba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} bca \\ caaa \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ba \\ b \\ bab \end{bmatrix} \right)$$

- b) Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf PCP4, dass PCP4 unentscheidbar ist.
- c) Wir betrachten das 456PCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine‘ auf das Alphabet $\Sigma = \{4, 5, 6\}$ beschränkt sind. Eine Instanz von 456PCP ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \{4, 5, 6\}^+$ für $i = 1, \dots, n$. Eine Lösung der Instanz K ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indices $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$.
Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf 456PCP, dass 456PCP unentscheidbar ist.
- d) Für Mengen Σ und Δ nennen wir eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ einen *Homomorphismus* (siehe auch Aufgabe FSK6-4), wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon \\ f(u \circ v) &= f(u) \circ f(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Wir definieren das Problem HOMPCP. Eine Instanz dieses Problem ist ein 4-Tupel (Σ, Δ, f, g) , wobei Σ und Δ endliche Mengen sind und $f, g : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ Homomorphismen. Eine Lösung der Instanz ist ein Wort $w \in \Sigma^+$ sodass gilt: $f(w) = g(w)$.

Wir betrachten außerdem das LPCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine‘ auch das leere Wort enthalten können. Eine Instanz von LPCP mit Alphabet Σ ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^*$ für $i = 1, \dots, n$ (wohingegen bei PCP gilt: $x_i, y_i \in \Sigma^+$). Eine Lösung der Instanz K ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indices $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$. Das LPCP-Problem ist unentscheidbar.

Zeigen Sie durch Reduktion von LPCP auf HOMPCP, dass HOMPCP für $|\Delta| \geq 2$ unentscheidbar ist.

FSK10-2 Entscheidbarkeit

Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten wie folgt: Wenn eine Sprache L (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die die charakteristische Funktion χ_L bzw. χ'_L berechnet. Wenn L nicht (semi-)entscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch ab.

- a) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.
- b) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.
- c) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

FSK10-3 Halteprobleme

a) Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 = \{w_M \in \{0,1\}^* \mid \text{TM } M \text{ hält für Eingabe } 01\}$$

wobei w_M das Encoding für M ist.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- L_1 ist entscheidbar.
- L_1 ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- L_1 ist weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

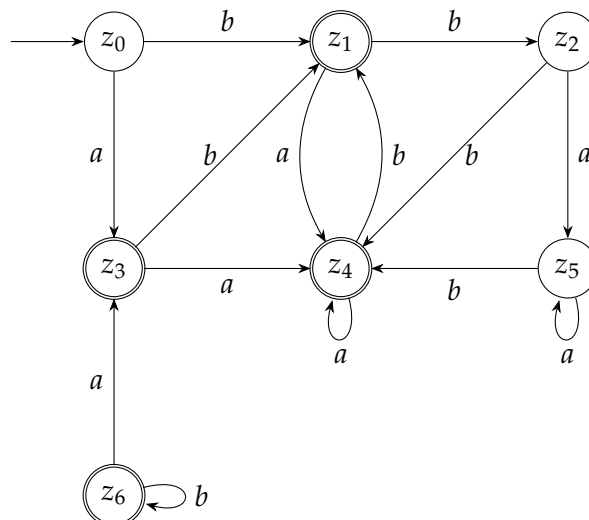
Um zu zeigen, dass L_1 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, beschreiben Sie kurz die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die L_1 (semi-)entscheidet. Um zu zeigen, dass L_1 nicht (semi-)entscheidbar ist, reduzieren Sie ein geeignetes Problem auf L_1 .

b) Zeigen Sie, dass das folgende Problem für jede deterministische Turingmaschine M und natürliche Zahl n entscheidbar ist.

„ M hält auf jeder Eingabe nach höchstens n Schritten.“

FSK10-4 Algorithmen Wiederholung

a) Minimieren Sie den folgenden DFA. Verwenden Sie die tabellarische Variante des Algorithmus zur Minimierung von DFAs aus der Vorlesung (nicht die graphische Variante und nicht den Algorithmus von letztem Jahr). Geben Sie die Partitionstabelle und den minimalen DFA an.



- b) Sei G die Grammatik $(\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, \{\$, \#\}, P, A_1)$ mit

$$P = \{A_1 \rightarrow A_2 A_5 \mid A_3 A_5, \\ A_2 \rightarrow A_4 A_3 \mid \$, \\ A_3 \rightarrow A_2 A_5, \\ A_4 \rightarrow \$, \\ A_5 \rightarrow A_5 A_1 \mid \#\}$$

Prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $\$ \# \# \$ \# \#$ in $L(G)$ ist. Erstellen Sie dazu die entsprechende Tabelle des Algorithmus und erklären Sie anhand der Tabelle, ob das Wort in $L(G)$ ist.

Klausurvorbereitung FSK-10-K

- a) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist unentscheidbar. Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit, indem sie H_0 darauf reduzieren.
- b) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion

$$\log: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad \log(x_1, x_2) = \log_{x_1} x_2$$

μ -rekursiv ist. Beachten Sie, dass der Logarithmus für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$\log(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2$$