PD Dr. Jan Johannsen
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 04.06.2026 bis 08.06.2026
Abgabe bis 16.06.2026, 14:00 Uhr

Übung 6 zur Vorlesung

# Formale Sprachen und Komplexität

**Hinweis:**
Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Beabeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

Wenn Sie Automaten angeben, tun Sie dies immer in Form eines Zustandsgraphen. Andere Formen der Darstellung (z.B. als Liste von Übergängen) werden nicht gewertet, da sie sehr viel aufwändiger zu korrigieren sind. Vergessen Sie nicht, im Zustandsgraph Start- und Endzustände zu markieren.

### FSK6-1 *Kontextfreie Grammatiken und Kellerautomaten*

Sei $L = \{a^{2n}\$a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, \$\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die $L$ erkennt.

b) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der $L$ akzeptiert (mit leerem Keller oder mit Endzuständen). Erklären Sie kurz, warum Ihr Automat genau $L$ akzeptiert.

### FSK6-2 *CYK-Algorithmus*

Sei $G$ die Grammatik $(\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, \{\$, \#\}, P, A_1)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & A_1 \to A_3A_4 \mid A_3A_2, \\ & A_2 \to A_2A_3 \mid A_4A_4, \\ & A_3 \to \$, \\ & A_4 \to \# \mid A_3A_4, \\ & A_5 \to A_4A_4 \mid \#\} \end{aligned}$$

a) Prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $w_1 = \$\#\$\#\#$ in $L(G)$ ist. Erstellen Sie dazu die entsprechende Tabelle des Algorithmus und erklären Sie anhand der Tabelle, ob das Wort in $L(G)$ ist.

b) Geben Sie alle weiteren Wörter $w$ an, für die sich aus der Tabelle ergibt, dass $w \in L(G)$ ist.

**FSK6-3** ***Begrenzter Keller***

a) Ein Kellerautomat mit $k$-begrenztem Keller ist ein Kellerautomat, bei dem maximal $k$ Symbole auf dem Keller liegen können. Wenn der Keller voll ist, können Übergänge, die ein Symbol auf den Keller legen würden, nicht gewählt werden.

Zeigen Sie, dass für jeden Kellerautomaten $K$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$L(K \text{ mit } k\text{-begrenztem Keller}) \subseteq L(K)$$

Hierbei nehmen wir an, dass $K$ mit leerem Keller akzeptiert.

b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ die Kellerautomaten mit $k$-begrenztem Keller genau die regulären Sprachen beschreiben.

**FSK6-4** ***Homomorphismen***

Gegeben Alphabete $\Sigma$ und $\Delta$ bezeichnen wir eine Abbildung $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ als *(Monoid-) Homomorphismus*, wenn sie strukturerhaltend ist, d.h. wenn gilt:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u \circ v) &= h(u) \circ h(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $h(L) = \{h(u) \mid u \in L\}$.

Man kann leicht zeigen, dass für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen $h$ gilt:

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \emptyset \\ h(L_1 \cup L_2) &= h(L_1) \cup h(L_2) \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen $h$:

$$\begin{aligned} h(L_1 \circ L_2) &= h(L_1) \circ h(L_2) \\ h(L_1^*) &= (h(L_1))^* \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie für alle regulären Sprachen $L$ und Homomorphismen $h$: Wenn $L$ regulär ist, dann ist auch $h(L)$ regulär.

c) Zeigen Sie, dass über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ die Sprache

$$L = \{a^n b^i c^n d^j \mid n, i, j \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist. Geben Sie zu diesem Zweck einen Homomorphismus $h$ an, sodass $h(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Da $h(L)$ bekanntlich nicht regulär ist, kann dann auch $L$ nicht regulär sein.

**Klausurvorbereitung FSK-6-K**

a) Sei $H = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, W, U, V, A, B\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to WW,$
  $W \to AU \mid BV \mid a \mid b,$
  $A \to a,$
  $B \to b,$
  $U \to WA,$
  $V \to WB\}$

Wenden Sie den CYK-Algorithmus an, um für das Wort *aabbaba* zu entscheiden, ob es in $L(H)$ liegt.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache $L = \{a^i w d^i \mid w \in \{b, c\}^+, i \in \mathbb{N}\}$ erzeugt. Verwenden Sie in Ihrer Grammatik keine $\varepsilon$-Produktionen. Erläutern Sie, warum $L(G) = L$ gilt, indem Sie die „Aufgabe“ der einzelnen Variablen und Produktionen erläutern.