

Zentralübung 5

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 29. April 2025
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



Plan für heute

1. Turingberechenbarkeit
2. Der CYK-Algorithmus
3. Der Satz von Myhill und Nerode (nur FSK)

1. Turingberechenbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt **turingberechenbar**, falls es eine deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, sodass für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(u) = v$$

g.d.w.

es gibt $z \in E$, sodass $Start_M(u) \vdash^* \square \dots \square z v \square \dots \square$

Wenn $f(u)$ undefiniert ist (f ist also eine partielle Funktion), dann kann die Maschine ewig laufen.

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **turingberechenbar**, falls es eine deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, sodass für alle $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n_1, \dots, n_k) = m$$

g.d.w.

es gibt $z \in E$, sodass $z_0 \text{bin}(n_1) \# \dots \# \text{bin}(n_k) \vdash^* \square \dots \square z \text{bin}(m) \square \dots \square$

wobei $\text{bin}(n)$ die Binärzahldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ ist.

Wenn $f(n_1, \dots, n_k)$ undefiniert ist (f ist also eine partielle Funktion), dann kann die Maschine ewig laufen.

1. Quiz

Welche der folgenden Aussagen gelten für die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen L ?

- a) L ist eine Typ i -Sprache (mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).
- b) Das Wortproblem für L ist entscheidbar.
- c) Es gibt eine Grammatik G , die L erzeugt.

1. Quiz

Welche der folgenden Aussagen gelten für die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen L ?

- a) L ist eine Typ i -Sprache (mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).
- b) Das Wortproblem für L ist entscheidbar.
- c) Es gibt eine Grammatik G , die L erzeugt.

Antwort: a) und c).

2. Quiz

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sind berechenbar?

- a) $f(x) = 3x$.
- b) $f(0) = 0$ und $f(x)$ ist undefiniert für $x > 0$.
- c) $f(x) = 1$, wenn es unendlich viele Primpaarzwillinge gibt, und $f(x) = 0$ sonst.
Primzahlzwillinge sind Paare $(p, p + 2)$, sodass p und $p + 2$ prim sind, z.B. $(3, 5)$ und $(11, 13)$. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.
- d) Alle Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sind berechenbar.

2. Quiz

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sind berechenbar?

- a) $f(x) = 3x$.
- b) $f(0) = 0$ und $f(x)$ ist undefiniert für $x > 0$.
- c) $f(x) = 1$, wenn es unendlich viele Primpaarzwillinge gibt, und $f(x) = 0$ sonst.
Primzahlzwillinge sind Paare $(p, p + 2)$, sodass p und $p + 2$ prim sind, z.B. $(3, 5)$ und $(11, 13)$. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.
- d) Alle Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sind berechenbar.

Antwort: a), b) und c).

Nicht berechenbare Funktionen

Sei $B := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist berechenbar}\}$ und $F := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$.

Dann gilt

- ▶ B ist abzählbar: Da alle Mengen im 7-Tupel endliche Mengen sind, ist klar, dass man alle Turingmaschinen nacheinander aufzählen kann (mithilfe der Gödelisierung)
- ▶ F ist überabzählbar (beweisbar durch Diagonalargument).
- ▶ Also muss es $f \in F$ geben, mit $f \notin B$. Diese Funktion f ist nicht berechenbar.

2. Der CYK-Algorithmus

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2						
3						
4						
5						
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3						
4						
5						
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4						
5						
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5						
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6						

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

1. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aaaaab$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

Da unten links nicht S in der Tabelle steht, liegt das Wort nicht in $L(G)$.

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
 $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a 1	a 2	b 3	a 4	a 5	a 6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2						
3						
4						
5						
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3						
4						
5						
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3		S		S		
4						
5						
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3		S		S		
4		S	S			
5						
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3		S		S		
4		S	S			
5		S, T				
6						

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a	a	b	a	a	a
	1	2	3	4	5	6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3		S		S		
4		S	S			
5		S, T				
6	S, U					

2. Aufgabe: CYK-Algorithmus ausführen

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \rightarrow ST \mid TU \mid US, T \rightarrow SS \mid a, U \rightarrow TT \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für $aabaaa$ aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Antwort:

	a 1	a 2	b 3	a 4	a 5	a 6
1	T	T	U	T	T	T
2	U	S		U	U	
3		S		S		
4		S	S			
5		S, T				
6	S, U					

Da unten links S in der Tabelle steht, liegt das Wort in $L(G)$.

3. Der Satz von Myhill und Nerode (nur FSK)

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

1. Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L . Welche Äquivalenzen gelten?

- a) $a \sim_L aa$
- b) $aaa \sim_L aaa$
- c) $aaaaa \sim_L \varepsilon$
- d) $aaaa \sim_L aaaaaa$.

1. Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L . Welche Äquivalenzen gelten?

- a) $a \sim_L aa$
- b) $aaa \sim_L aaa$
- c) $aaaaa \sim_L \varepsilon$
- d) $aaaa \sim_L aaaaaa$.

Antwort: b) und d).

2. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L .

Welche Äquivalenzen gelten?

- a) $a^5\$ \sim_L a^6\$$
- b) $a^i\$b^j \sim_L a^j\b^i für alle $i, j \in \mathbb{N}$
- c) $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- d) $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

2. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L .

Welche Äquivalenzen gelten?

- a) $a^5\$ \sim_L a^6\$$
- b) $a^i\$b^j \sim_L a^j\b^i für alle $i, j \in \mathbb{N}$
- c) $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- d) $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Antwort: a), b) und d).

3. Quiz

Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L .

Für welche Wörter u gilt $\$ \$ \sim_L u$?

- a) ε
- b) $\$$
- c) $\$ \$ \$$
- d) $b^i \$ a^j$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

3. Quiz

Sei $L = \{a^i \$ b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L .

Für welche Wörter u gilt $\$ \$ \sim_L u$?

- a) ε
- b) $\$$
- c) $\$ \$ \$$
- d) $b^i \$ a^j$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Antwort: c).

Der Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Zur Erinnerung:

- ▶ Die Äquivalenzklasse $[u]_{\sim_L}$ ist definiert als $\{v \mid u \sim_L v\}$.
- ▶ Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer disjunkten Äquivalenzklassen: $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup [u_2]_{\sim_L} \cup \dots$.
- ▶ Der Index kann unendlich sein.

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\{a, b\}$

$$\text{Index}(\sim_L) = 3$$

- ▶ $[\epsilon]_{\sim_L} = \{\epsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \{a, b\}^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \{a, b\}^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

$$\{a, b\}^* = [\epsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$$

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i , sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.

Daher sind $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$ paarweise disjunkt.

Beachte: Es ist hierfür **nicht** notwendig, alle Äquivalenzklassen der disjunkten Zerlegung von Σ^* zu finden.

Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$.
Bestimme $\text{Index}(\sim_L)$.

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

f) 5

g) 6

h) ∞

Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$.
Bestimme $\text{Index}(\sim_L)$.

- | | |
|------|-------------|
| a) 0 | e) 4 |
| b) 1 | f) 5 |
| c) 2 | g) 6 |
| d) 3 | h) ∞ |

Antwort: f). Es gibt 5 disjunkte Äquivalenzklassen:
 $[\epsilon]_{\sim_L}, [a]_{\sim_L}, [aa]_{\sim_L}, [aaa]_{\sim_L}, [aaaa]_{\sim_L}$.

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\epsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die um $a^* \$ b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\epsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L} =$ Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\epsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L}$ = Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\epsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L}$ = Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen

$\Sigma^* = [\epsilon]_{\sim_L} \cup [\$]_{\sim_L} \cup [ab]_{\sim_L}$

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\epsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L}$ = Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben

$[ab]_{\sim_L} = [b^j]_{\sim_L}$ = Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen

$\Sigma^* = [\epsilon]_{\sim_L} \cup [\$]_{\sim_L} \cup [ab]_{\sim_L}$

Daher $\text{Index}(L) = 3$ und L ist regulär.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$a^i \not\sim_L a^j$ für alle $i \neq j$, da $a^i\$b^i \in L$ aber $a^j\$b^i \notin L$.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.

Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$a^i \not\sim_L a^j$ für alle $i \neq j$, da $a^i\$b^i \in L$ aber $a^j\$b^i \notin L$.

Daher $\text{Index}(L) = \infty$ und L ist nicht regulär.