8c

Intuitive und Turing-Berechenbarkeit

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 21. Juli 2025
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Intuitive Berechenbarkeit

- Was kann mit einem Computerprogramm berechnet werden?
- Was kann nicht mit einem Computerprogramm berechnet werden?
- Aus der Programmiererfahrung hat man ein gewisses Gefühl dafür, was berechnet werden kann (und was nicht).
- Das ist der intuitive Begriff der Berechenbarkeit.
- Wie beweist man, dass etwas nicht berechnet werden kann?
  Diese Frage ist auch von praktischem Nutzen:
  Die Suche nach passendem Algorithmus ist sinnlos.

Geschichte

- Berühmte Mathematiker/Informatiker versuchten in den 1930er Jahren den Begriff der Berechenbarkeit zu formalisieren.
- Dafür entwarfen sie verschiedene Modelle.
- Insbesondere sind zu nennen:
  Alan Turing (Turingmaschine) und
  Alonzo Church (Lambda-Kalkül)

Berechenbare Funktion

Eine (partielle oder totale) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ nennen wir berechenbar, wenn es einen Algorithmus einer modernen Programmiersprache gibt, der f berechnet.

- Bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k)$ stoppt der Algorithmus nach endlich vielen Berechnungsschritten und gibt den Wert von $f(n_1, \ldots, n_k)$ aus.
- Wenn $f(n_1, \ldots, n_k)$ undefiniert ist (f ist also eine partielle Funktion), dann stoppt der Algorithmus nicht.

Beispiele für berechenbare Funktionen

Der Algorithmus

Eingabe: Zahl $n \in \mathbb{N}$
Beginn
  solange *true* **tue**
    skip

berechnet $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_1(x) =$ undefiniert für alle x.

Beispiele für berechenbare Funktionen

Der Algorithmus

Eingabe: Zahl $n \in \mathbb{N}$
Beginn
  solange *true* **tue**
    skip

berechnet $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_1(x) =$ undefiniert für alle x.

Der Algorithmus

Eingabe: Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
Beginn
  $hilf := n_1 + n_2$;
  return *hilf*

berechnet die Funktion $f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_2(x, y) = x + y$.

Beispiele für berechenbare Funktionen

Der Algorithmus

Eingabe: Zahl $n \in \mathbb{N}$
Beginn
  solange *true* **tue**
    skip

berechnet $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_1(x) =$ undefiniert für alle x.

Der Algorithmus

Eingabe: Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
Beginn
  $hilf := n_1 + n_2$;
  return *hilf*

berechnet die Funktion $f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_2(x, y) = x + y$.

f_1 und f_2 sind daher berechenbar.

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ein Präfix der Ziffern der Dezimalzahldarstellung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Z.B. gilt

- $f_3(31) = 1$ und $f_3(314) = 1$
- $f_3(2) = 0$ und $f_3(315) = 0$

Ist f_3 berechenbar?

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ein Präfix der Ziffern der Dezimalzahldarstellung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Z.B. gilt

- $f_3(31) = 1$ und $f_3(314) = 1$
- $f_3(2) = 0$ und $f_3(315) = 0$

Ist f_3 berechenbar?

Ja. Sei n eine k-stellige Zahl. Es gibt Algorithmen, die die ersten k Stellen von π berechnen. Danach kann man vergleichen.

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimalzahldarstellung von } \pi \text{ das Wort } 3^n \text{ als Teilwort enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f_4 berechenbar?

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimalzahldarstellung von } \pi \text{ das Wort } 3^n \text{ als Teilwort enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f_4 berechenbar?

Ja.

- Entweder $f_4(n) = 1$ für alle n
- oder es gibt n_0, sodass π 3^{n_0} als Teilwort hat, aber alle Teilwörter 3^n mit $n > n_0$ nicht mehr besitzt.
  Dann ist $f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq n_0 \\ 0 & \text{falls } n > n_0 \end{cases}$
- Für beide Fälle können wir Algorithmen angeben, die f_4 berechnen.

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimalzahldarstellung von } \pi \text{ das Wort } 3^n \text{ als Teilwort enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f_4 berechenbar?

Ja.

- Entweder $f_4(n) = 1$ für alle n
- oder es gibt n_0, sodass π 3^{n_0} als Teilwort hat, aber alle Teilwörter 3^n mit $n > n_0$ nicht mehr besitzt.
  Dann ist $f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq n_0 \\ 0 & \text{falls } n > n_0 \end{cases}$
- Für beide Fälle können wir Algorithmen angeben, die f_4 berechnen.

Beachte: Unsere Definition von Berechenbarkeit ist nicht konstruktiv.
Wir müssen keinen Algorithmus liefern, sondern nur einen Beweis, dass einer existiert.

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_5(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls deterministische LBAs genau die gleichen} \\ & \text{Sprachen erkennen wie nichtdeterministische LBAs} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f_5 berechenbar?

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f_5(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls deterministische LBAs genau die gleichen} \\ & \text{Sprachen erkennen wie nichtdeterministische LBAs} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f_5 berechenbar?

Ja. Entweder ist $f_5(x) = 1$ oder ist $f_5(x) = 0$.
Beide Funktionen sind berechenbar
(unabhängig davon, ob das 1. LBA-Problem eine positive oder negative Lösung hat).

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f^r(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ein Präfix der Ziffern der Dezimalzahldarstellung von } r \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f^r für jedes $r \in \mathbb{R}$ berechenbar?

Beispiele für berechenbare Funktionen

$$f^r(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ein Präfix der Ziffern der Dezimalzahldarstellung von } r \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f^r für jedes $r \in \mathbb{R}$ berechenbar?

Nein. Wir bräuchten genauso viele verschiedene Algorithmen wie es reelle Zahlen gibt.
Es gibt nur abzählbar viele Algorithmen einer Programmiersprache,
aber überabzählbar viele reelle Zahlen.

Churchsche These

Im Folgenden untersuchen wir Modelle zur Berechenbarkeit:

- Turingmaschinen (in dieser Stunde)
- μ-rekursive Funktionen (nur FSK)

Churchsche These

Im Folgenden untersuchen wir Modelle zur Berechenbarkeit:

- Turingmaschinen (in dieser Stunde)
- μ-rekursive Funktionen (nur FSK)

Beide führen zum selben Begriff der Berechenbarkeit.

Churchsche These

Die Klasse der turingberechenbaren Funktionen stimmt genau mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen überein.

Churchsche These

Im Folgenden untersuchen wir Modelle zur Berechenbarkeit:

- Turingmaschinen (in dieser Stunde)
- μ-rekursive Funktionen (nur FSK)

Beide führen zum selben Begriff der Berechenbarkeit.

Churchsche These

Die Klasse der turingberechenbaren Funktionen stimmt genau mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen überein.

Die Churchsche These kann man nicht beweisen, da der Begriff „intuitiv berechenbar“ nicht formal gefasst werden kann.

Turingberechenbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt turingberechenbar, falls es eine deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, sodass für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(u) = v$$
g.d.w.
$$\text{es gibt } z \in E, \text{ sodass } Start_M(u) \vdash^* \square \cdots \square z v \square \cdots \square$$

Wenn $f(u)$ undefiniert ist (f ist also eine partielle Funktion),
dann kann die Maschine ewig laufen.

Turingberechenbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt turingberechenbar, falls es eine deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, sodass für alle $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m$$
g.d.w.
es gibt $z \in E$, sodass $z_0 bin(n_1) \# \cdots \# bin(n_k) \vdash^* \square \cdots \square z bin(m) \square \cdots \square$

wobei $bin(n)$ die Binärzahldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ ist.
Wenn $f(n_1, \ldots, n_k)$ undefiniert ist (f ist also eine partielle Funktion), dann kann die Maschine ewig laufen.

Eine Konsequenz der Definition ist:
Falls $f(u)$ undefiniert ist, dann kann die Maschine ewig laufen.

Beispiele für turingberechenbare Funktionen

Nachfolgerfunktion

Die Funktion $f(x) = x + 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist turingberechenbar.
Wir haben ein Beispiel bereits gesehen.

Beispiele für turingberechenbare Funktionen

Nachfolgerfunktion

Die Funktion $f(x) = x + 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist turingberechenbar.
Wir haben ein Beispiel bereits gesehen.

Identitätsfunktion

Die Funktion $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist turingberechenbar:
Für die Turingmaschine $M = (\{z_0\}, \{0, 1, \#\}, \{0, 1, \#, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_0\})$ gilt:
$z_0 bin(n) \vdash^* z_0 bin(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele für turingberechenbare Funktionen

Nachfolgerfunktion

Die Funktion $f(x) = x + 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist turingberechenbar.
Wir haben ein Beispiel bereits gesehen.

Identitätsfunktion

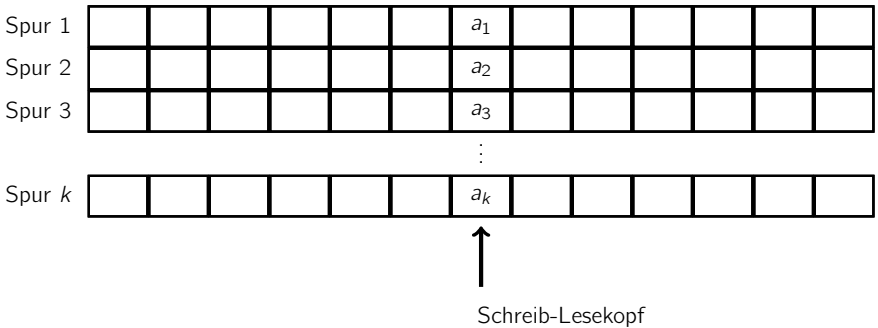
Die Funktion $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist turingberechenbar:
Für die Turingmaschine $M = (\{z_0\}, \{0, 1, \#\}, \{0, 1, \#, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_0\})$ gilt:
$z_0 bin(n) \vdash^* z_0 bin(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Überall undefinierte Funktion

Die Funktion $f(x) =$ undefiniert für alle x ist turingberechenbar, da die Turingmaschine $M = (\{z_0\}, \{0, 1, \#\}, \{0, 1, \#, \square\}, \delta, z_0, \square, \emptyset)$ mit $\delta(z_0, a) = (z_0, a, N)$ für keine Eingabe akzeptiert (sondern stets in eine Endlosschleife geht).

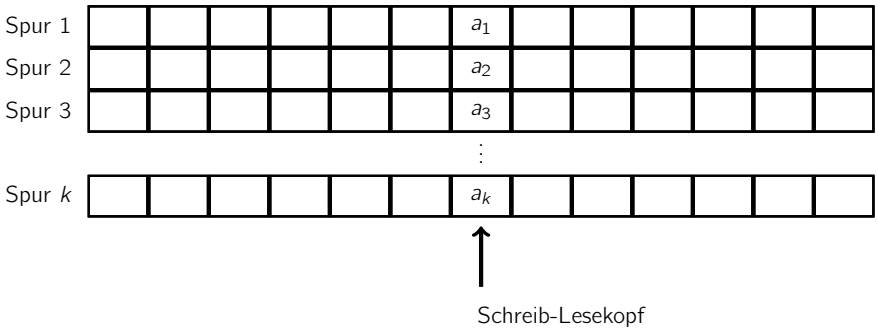
Mehrspuren-Turingmaschinen

Erweiterung: Das Band hat k Spuren:



Mehrspuren-Turingmaschinen

Erweiterung: Das Band hat k Spuren:



Mehrspuren-Turingmachinen machen manche Konstruktionen einfacher.

Mehrspuren-Turingmaschinen

Definition

Eine k-Spuren-Turingmaschine (für $k \in \mathbb{N}_{>0}$) ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$, wobei:

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ ist das (endliche) Bandalphabet
- δ ist die Überführungsfunktion
  - für DTM: $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma^k \to Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}$
  - für NTM: $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\})$
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Blank-Symbol
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Mehrspuren-Turingmaschinen

Für Berechenbarkeit erfolgt die Ein- und Ausgabe auf der ersten Spur.
Anfangs stehen alle anderen leer.

Satz

Jede Mehrspuren-Turingmaschine kann von einer 1-Spur-Turingmaschine simuliert werden.

Mehrspuren-Turingmaschinen

Für Berechenbarkeit erfolgt die Ein- und Ausgabe auf der ersten Spur.
Anfangs stehen alle anderen leer.

Satz

Jede Mehrspuren-Turingmaschine kann von einer 1-Spur-Turingmaschine simuliert werden.

Beweis Konstruktion einer 1-Spur-TM mit $\Gamma \cup \Gamma^k$ als Bandalphabet, Σ als Eingabealphabet und $\square$ als Blank-Symbol:

Mehrspuren-Turingmaschinen

Für Berechenbarkeit erfolgt die Ein- und Ausgabe auf der ersten Spur.
Anfangs stehen alle anderen leer.

Satz

Jede Mehrspuren-Turingmaschine kann von einer 1-Spur-Turingmaschine simuliert werden.

Beweis Konstruktion einer 1-Spur-TM mit $\Gamma \cup \Gamma^k$ als Bandalphabet, Σ als Eingabealphabet und $\square$ als Blank-Symbol:

1. Aus Eingabe $w \in \Sigma^*$ erzeuge die Mehrspurendarstellung:
   Ersetze $a \in \Sigma$ durch das k-Tupel $(a, \square, \ldots, \square)$.

Mehrspuren-Turingmaschinen

Für Berechenbarkeit erfolgt die Ein- und Ausgabe auf der ersten Spur.
Anfangs stehen alle anderen leer.

Satz

Jede Mehrspuren-Turingmaschine kann von einer 1-Spur-Turingmaschine simuliert werden.

Beweis Konstruktion einer 1-Spur-TM mit $\Gamma \cup \Gamma^k$ als Bandalphabet, Σ als Eingabealphabet und $\square$ als Blank-Symbol:

1. Aus Eingabe $w \in \Sigma^*$ erzeuge die Mehrspurendarstellung:
   Ersetze $a \in \Sigma$ durch das k-Tupel $(a, \square, \ldots, \square)$.
2. Simuliere anschließend die Mehrspurenmaschine.

Mehrspuren-Turingmaschinen

Für Berechenbarkeit erfolgt die Ein- und Ausgabe auf der ersten Spur.
Anfangs stehen alle anderen leer.

Satz

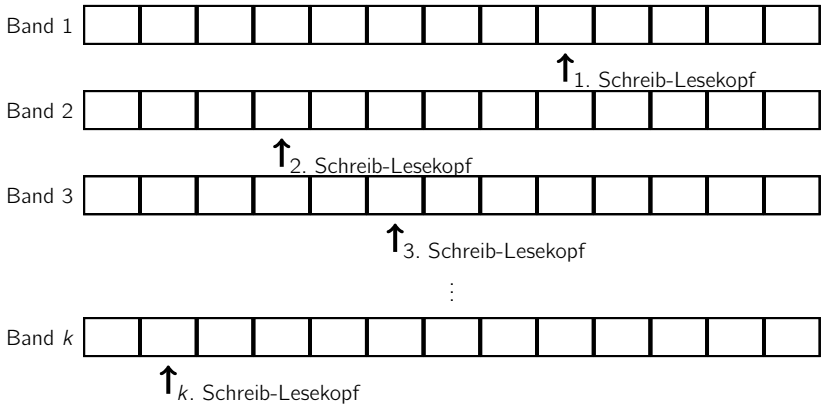
Jede Mehrspuren-Turingmaschine kann von einer 1-Spur-Turingmaschine simuliert werden.

Beweis Konstruktion einer 1-Spur-TM mit $\Gamma \cup \Gamma^k$ als Bandalphabet, Σ als Eingabealphabet und $\square$ als Blank-Symbol:

1. Aus Eingabe $w \in \Sigma^*$ erzeuge die Mehrspurendarstellung:
   Ersetze $a \in \Sigma$ durch das k-Tupel $(a, \square, \ldots, \square)$.
2. Simuliere anschließend die Mehrspurenmaschine.
3. Nach Akzeptanz der Mehrspurenmaschine:
   Erzeuge 1-Spur-Darstellung, d.h. ersetze alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ durch a_1. $\square$

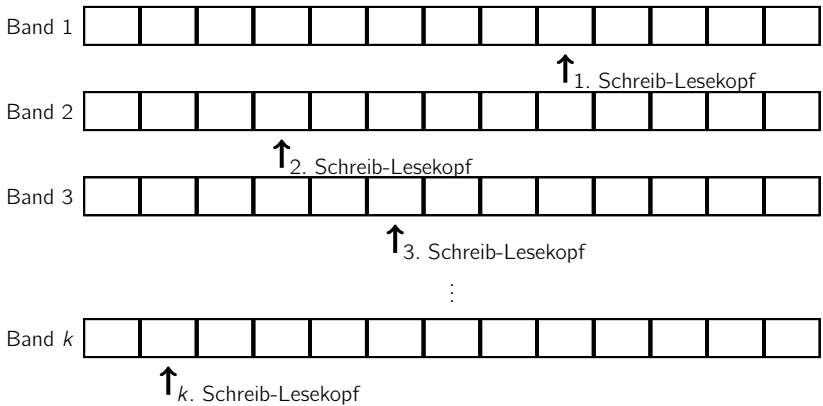
Mehrband-Turingmaschinen

Erweiterung: Die Schreib-Leseköpfe bewegen sich unabhängig.



Mehrband-Turingmaschinen

Erweiterung: Die Schreib-Leseköpfe bewegen sich unabhängig.



Mehrband-Turingmachinen machen manche Konstruktionen noch einfacher.

Mehrband-Turingmaschinen

Definition

Eine k-Band-Turingmaschine (für $k \in \mathbb{N}_{>0}$) ist ein 7-Tupel $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ ist das (endliche) Bandalphabet
- δ ist die Überführungsfunktion
  - für DTM: $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma^k \to Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$
  - für NTM: $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k)$
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Blank-Symbol
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

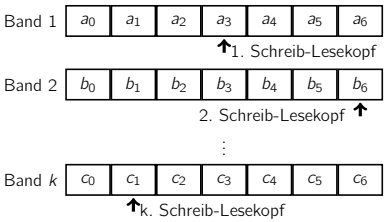
Mehrband-Turingmaschinen

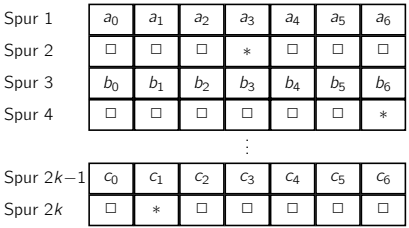
Für Berechenbarkeit erfolgt die Ein- und Ausgabe auf der ersten Spur.
Anfangs stehen alle anderen leer.

Theorem

Jede Mehrband-Turingmaschine kann von einer 1-Band-Turingmaschine simuliert werden.

Beweis Sei M eine k-Band-TM. Wir simulieren M mit einer $2k$-Spuren-TM M', die sich wiederum mit einer 1-Spuren-TM simulieren lässt.





Mehrband-Turingmaschinen

Beweis (Fortsetzung) Die Eingabe $w \in \Sigma^*$ liegt auf dem Eingabeband von M'.

Mehrband-Turingmaschinen

Beweis (Fortsetzung) Die Eingabe $w \in \Sigma^*$ liegt auf dem Eingabeband von M'.

1. Erzeuge Darstellung in $2k$ Spuren.

Mehrband-Turingmaschinen

Beweis (Fortsetzung) Die Eingabe $w \in \Sigma^*$ liegt auf dem Eingabeband von M'.

1. Erzeuge Darstellung in $2k$ Spuren.
2. Simuliere anschließend Berechnungsschritte von M. Für jeden Schritt:
   - 2.1 Lies den verwendeten Bandbereich von links nach rechts, um die Kopfpositionen zu finden.
   - 2.2 Speichere dabei alle k Bandinhalte an den Kopfpositionen durch Zustände.
   - 2.3 Führe den Schritt von M aus, durch Anpassen der Bandinhalte und der Kopfpositionen.

Mehrband-Turingmaschinen

Beweis (Fortsetzung) Die Eingabe $w \in \Sigma^*$ liegt auf dem Eingabeband von M'.

1. Erzeuge Darstellung in $2k$ Spuren.
2. Simuliere anschließend Berechnungsschritte von M. Für jeden Schritt:
   - 2.1 Lies den verwendeten Bandbereich von links nach rechts, um die Kopfpositionen zu finden.
   - 2.2 Speichere dabei alle k Bandinhalte an den Kopfpositionen durch Zustände.
   - 2.3 Führe den Schritt von M aus, durch Anpassen der Bandinhalte und der Kopfpositionen.
3. Bei Akzeptanz durch M transformiere die Spurendarstellung in die Darstellung der Ausgabe. □