

3b

Determinisierung von endlichen Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 21. Juli 2025
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\}$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \\ \cup \{z_E \mid A \rightarrow a \in P\}$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \\ \cup \{z_E \mid A \rightarrow a \in P\}$$

$$\delta(z_E, a) := \emptyset$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & B \rightarrow aC \mid bC \mid cC, \\ & C \rightarrow a \mid b \mid c \} \end{aligned}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & B \rightarrow aC \mid bC \mid cC, \\ & C \rightarrow a \mid b \mid c\}\end{aligned}$$

Ableitung des Wortes *backa*:

$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow backa \in L(G)$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & B \rightarrow aC \mid bC \mid cC, \\ & C \rightarrow a \mid b \mid c\}\end{aligned}$$

Ableitung des Wortes *backa*:

$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow backa \in L(G)$$

NFA zu G : $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$ mit

$$\begin{array}{lllll}\delta(S, a) = \{A, B\} & \delta(A, a) = \{A, B\} & \delta(B, a) = \{C\} & \delta(C, a) = \{z_E\} & \delta(z_E, a) = \emptyset \\ \delta(S, b) = \{A\} & \delta(A, b) = \{A\} & \delta(B, b) = \{C\} & \delta(C, b) = \{z_E\} & \delta(z_E, b) = \emptyset \\ \delta(S, c) = \{A\} & \delta(A, c) = \{A\} & \delta(B, c) = \{C\} & \delta(C, c) = \{z_E\} & \delta(z_E, c) = \emptyset\end{array}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & B \rightarrow aC \mid bC \mid cC, \\ & C \rightarrow a \mid b \mid c\}\end{aligned}$$

Ableitung des Wortes *backa*:

$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow backa \in L(G)$$

NFA zu G : $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$ mit

$$\begin{array}{lllll} \delta(S, a) = \{A, B\} & \delta(A, a) = \{A, B\} & \delta(B, a) = \{C\} & \delta(C, a) = \{z_E\} & \delta(z_E, a) = \emptyset \\ \delta(S, b) = \{A\} & \delta(A, b) = \{A\} & \delta(B, b) = \{C\} & \delta(C, b) = \{z_E\} & \delta(z_E, b) = \emptyset \\ \delta(S, c) = \{A\} & \delta(A, c) = \{A\} & \delta(B, c) = \{C\} & \delta(C, c) = \{z_E\} & \delta(z_E, c) = \emptyset \end{array}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned}P = \{ & \textcolor{brown}{S} \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid \textcolor{blue}{a}B, \\ & A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ & B \rightarrow aC \mid bC \mid cC, \\ & C \rightarrow a \mid b \mid c\}\end{aligned}$$

Ableitung des Wortes *backa*:

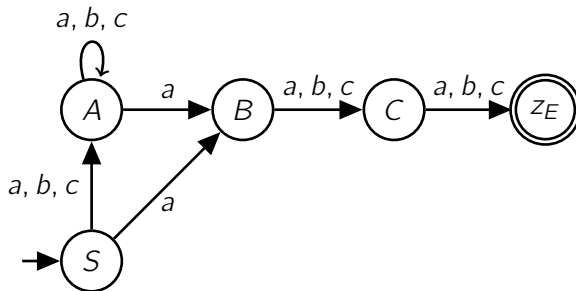
$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow \textcolor{brown}{baca} \in \textcolor{brown}{L}(G)$$

NFA zu G : $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$ mit

$$\begin{array}{lllll}\delta(\textcolor{brown}{S}, \textcolor{blue}{a}) = \{A, \textcolor{blue}{B}\} & \delta(A, a) = \{A, B\} & \delta(B, a) = \{C\} & \delta(C, a) = \{z_E\} & \delta(z_E, a) = \emptyset \\ \delta(S, b) = \{A\} & \delta(A, b) = \{A\} & \delta(B, b) = \{C\} & \delta(C, b) = \{z_E\} & \delta(z_E, b) = \emptyset \\ \delta(S, c) = \{A\} & \delta(A, c) = \{A\} & \delta(B, c) = \{C\} & \delta(C, c) = \{z_E\} & \delta(z_E, c) = \emptyset\end{array}$$

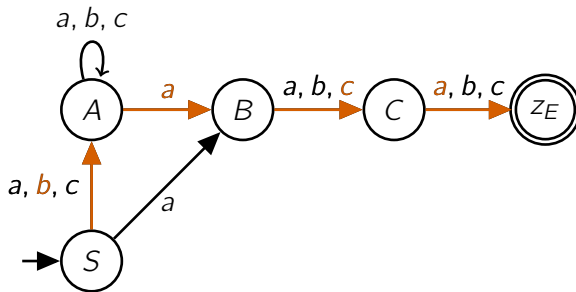
Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Zustandsgraph zu M :



Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Zustandsgraph zu M :



Eingabe: $\text{baca} \in L(M)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

- ▶ Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- ▶ Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
für $i \in \{2, \dots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
für $i \in \{2, \dots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

$$a_1 \cdots a_n \in L(G)$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
für $i \in \{2, \dots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

$$S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
für $i \in \{2, \dots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

g.d.w. $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,

d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \rightarrow \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
für $i \in \{2, \dots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

g.d.w. $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Daher gibt es einen NFA M mit $L(M) = L(G) = L$. □

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

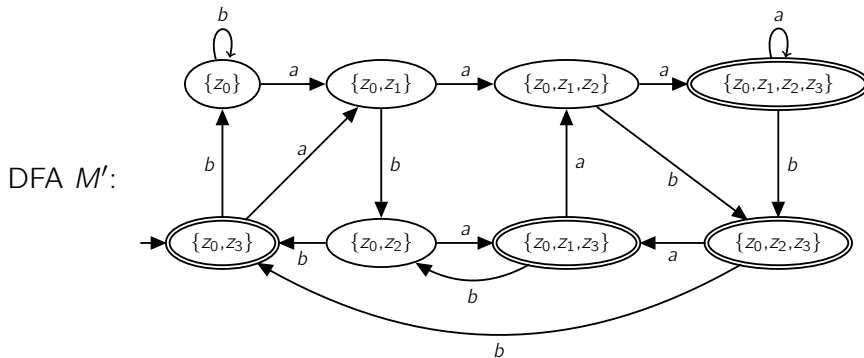
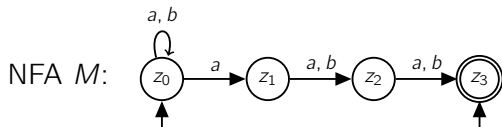
Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

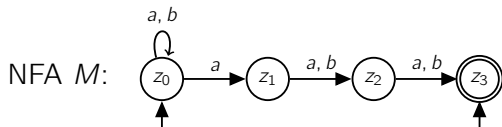
Der Beweis basiert auf der [Potenzmengenkonstruktion](#):

- ▶ Konstruiere für einen gegebenen NFA M einen DFA M' , sodass sich der DFA **alle** Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte.
- ▶ Jede Teilmenge von Zuständen des NFA wird zu einem Zustand des DFA.
- ▶ Da Z endlich ist, gibt es nur endlich viele Teilmengen.

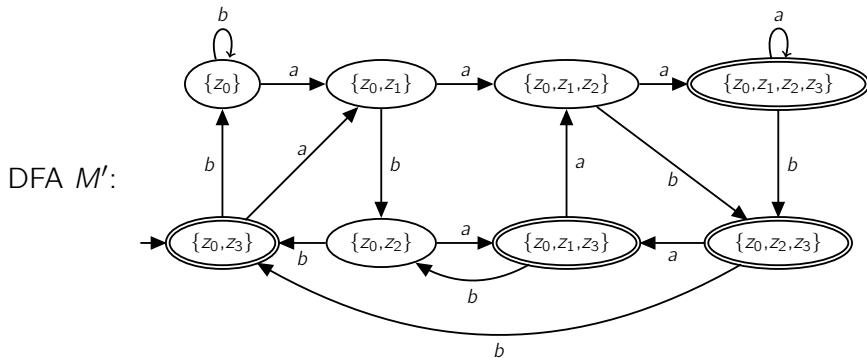
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



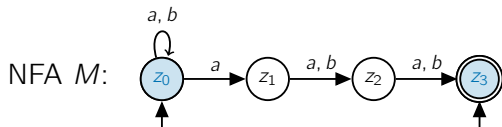
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



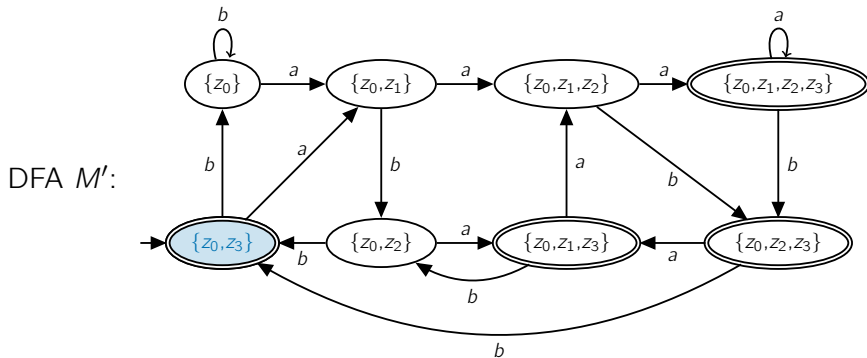
Eingabe: *babbabb*



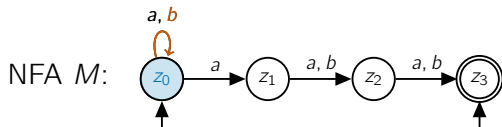
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



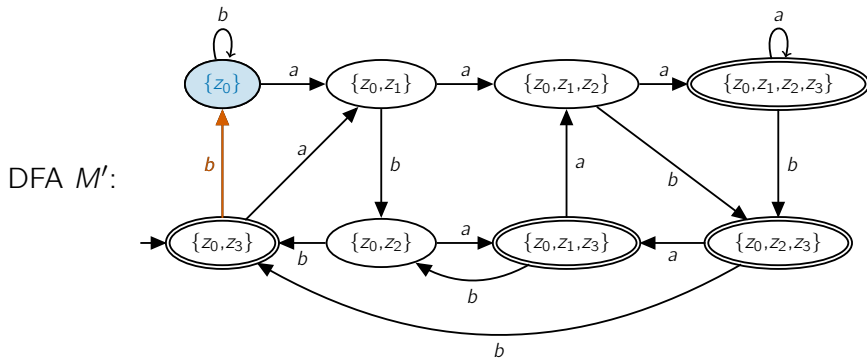
Eingabe: *babbabb*



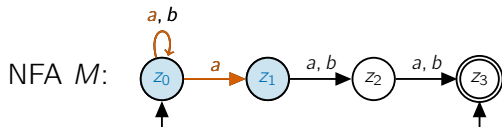
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



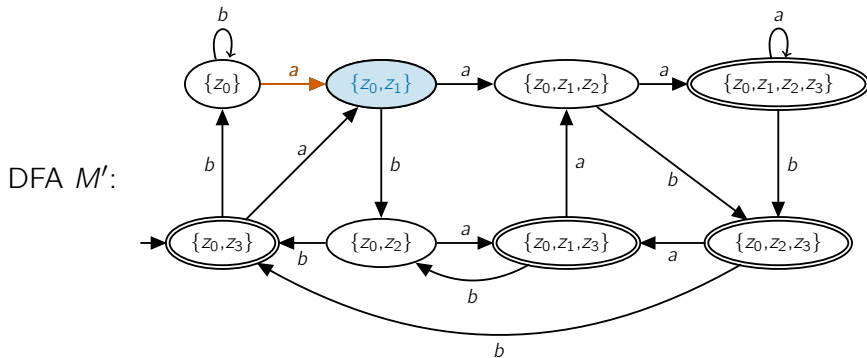
Eingabe: *babbbabb*



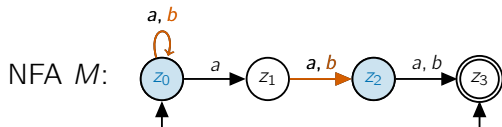
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



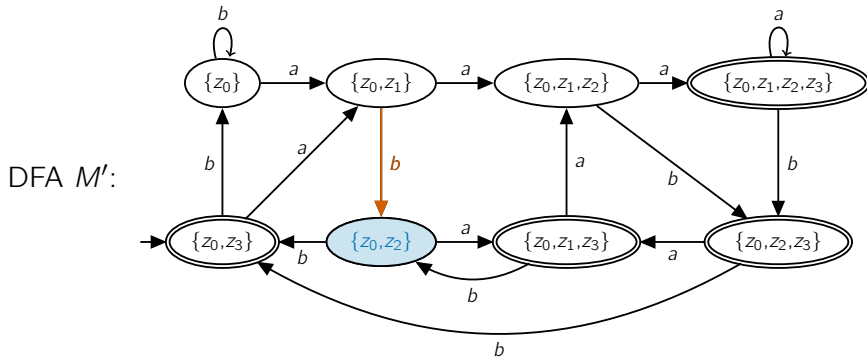
Eingabe: *bababb*



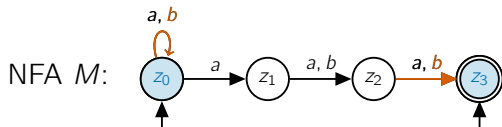
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



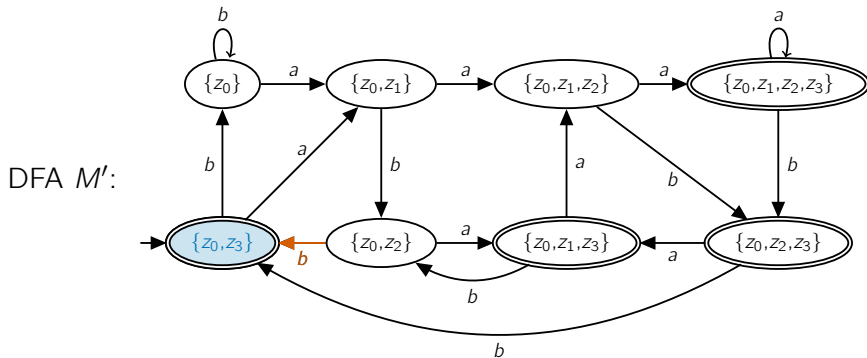
Eingabe: *bab**b**abb*



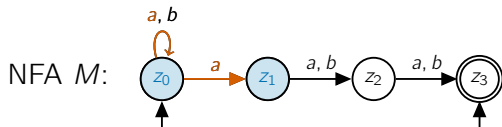
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



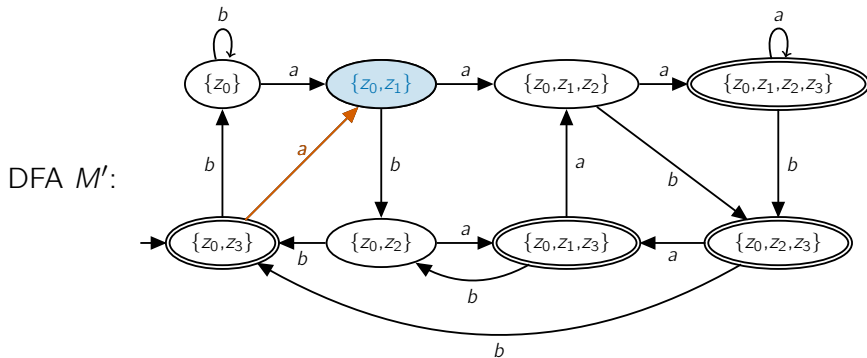
Eingabe: *bab**b**abb*



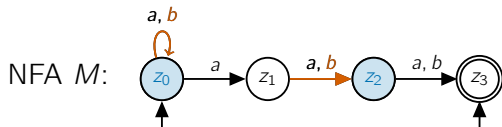
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



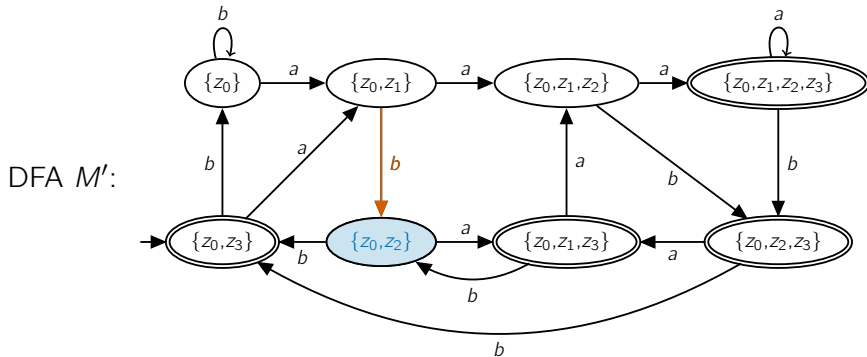
Eingabe: *babbabb*



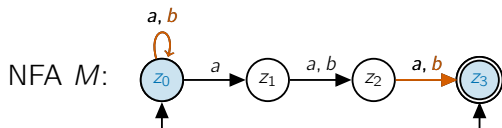
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



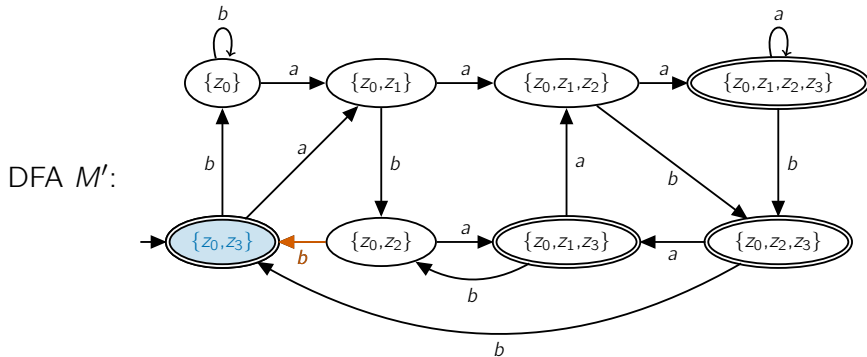
Eingabe: *babba****b***



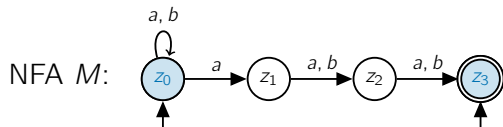
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



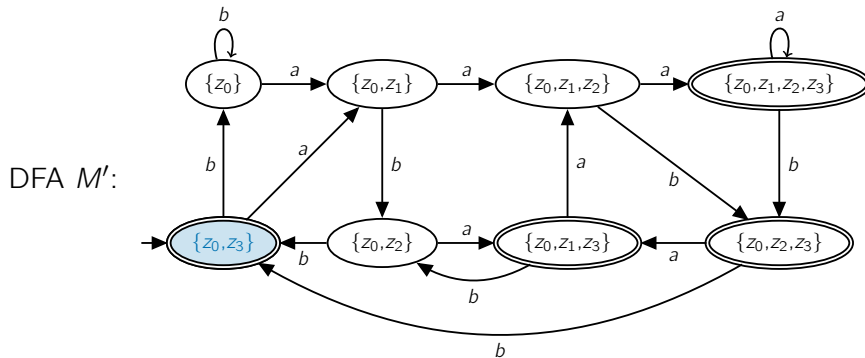
Eingabe: *babbab****b***



Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



Eingabe: $babbabb \in L(M)$
 $\in L(M')$



Potenzmengenkonstruktion

Für den NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ definieren wir den DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$ mit

- ▶ $Z' := \mathcal{P}(Z)$
- ▶ $S' := S$
- ▶ $E' := \{X \in Z' \mid E \cap X \neq \emptyset\}$
- ▶ $\delta'(X, a) := (\bigcup_{z \in X} \delta(z, a)) = \widetilde{\delta}(X, a)$

Potenzmengenkonstruktion

Für den NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ definieren wir den DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$ mit

► $Z' := \mathcal{P}(Z)$

Die Zustandsmenge ist die Potenzmenge von Z .

► $S' := S$

Der Startzustand ist die Menge S aller Startzustände von M .

► $E' := \{X \in Z' \mid E \cap X \neq \emptyset\}$

Jede Menge, die mindestens einen Endzustand von M enthält, ist Endzustand.

► $\delta'(X, a) := (\bigcup_{z \in X} \delta(z, a)) = \tilde{\delta}(X, a)$

Die Übergangsfunktion berechnet alle von einem Zustand in X aus über a erreichbaren Zustände.

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweis Wir zeigen, dass $L(M') = L(M)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(M')$ für ein beliebiges w .

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweis Wir zeigen, dass $L(M') = L(M)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(M')$ für ein beliebiges w .

► Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \cap E \neq \emptyset$ g.d.w. $S \in E'$ g.d.w. $\varepsilon \in L(M')$.

Beweis (Fortsetzung)

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

► Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$a_1 \cdots a_n \in L(M)$

g.d.w. $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)) = Z_1$,
 $(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)) = Z_1$,
 $(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

$$a_1 \cdots a_n \in L(M')$$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)) = Z_1$,
 $(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

$$\tilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E'$$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)) = Z_1$,
 $(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $\delta'(S, a_1) = Z_1$,

$\delta'(Z_{i-1}, a_i) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. $\tilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E'$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

g.d.w. $\tilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)) = Z_1$,
 $(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

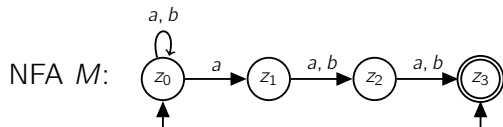
g.d.w. es gibt $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Z$ mit $\delta'(S, a_1) = Z_1$,
 $\delta'(Z_{i-1}, a_i) = Z_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. $\tilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E'$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$

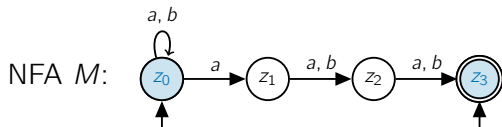


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

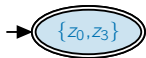


DFA M' :

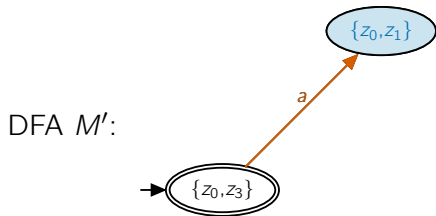
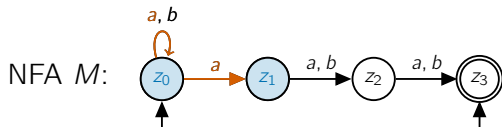
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



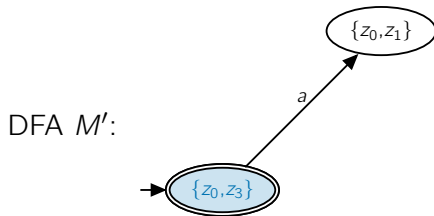
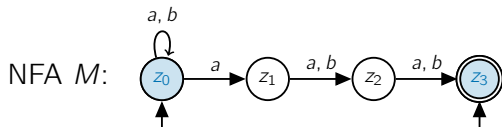
DFA M' :



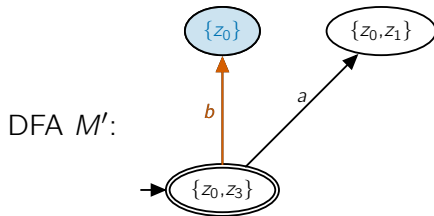
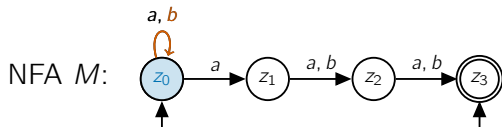
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



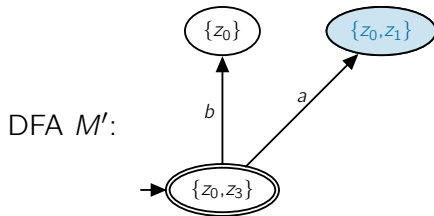
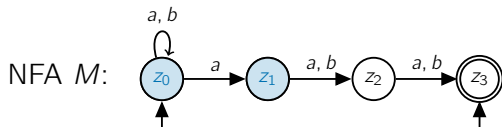
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



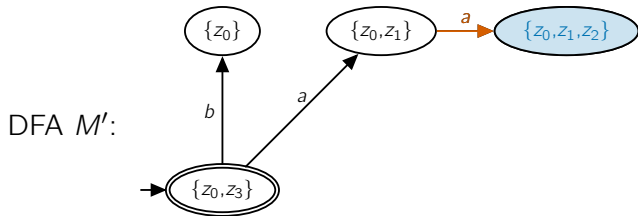
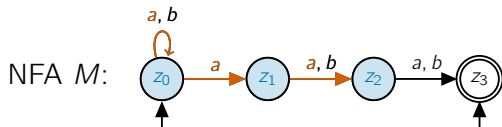
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



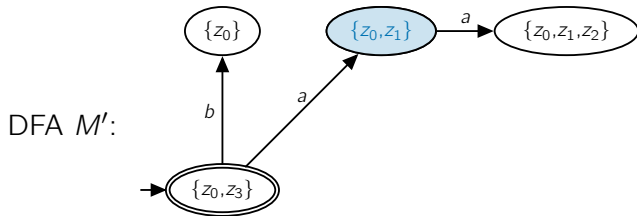
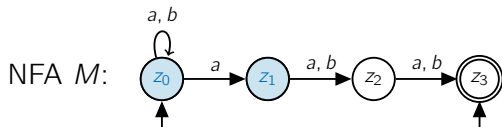
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



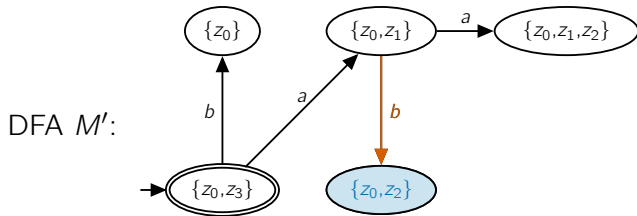
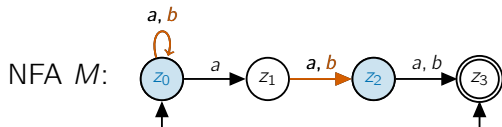
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



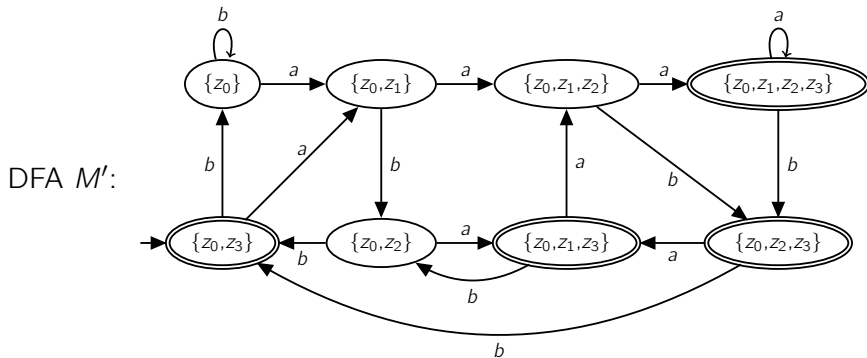
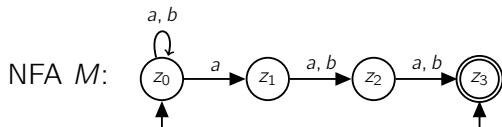
Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion



Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

⊇ Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA, der sie erkennt.

Das folgt aus:

- ▶ Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.
- ▶ Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

⊇ Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA, der sie erkennt.

Das folgt aus:

- ▶ Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.
- ▶ Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

⊆ Die akzeptierte Sprache eines DFA bzw. NFA ist regulär.

Das folgt aus:

- ▶ Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.
- ▶ Sei M ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär. □

Größe des DFA vs. NFA

- ▶ Sei ein NFA mit n Zuständen.
- ▶ Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände.
Der Platz explodiert uns.
- ▶ Geht es besser?

Größe des DFA vs. NFA

- ▶ Sei ein NFA mit n Zuständen.
- ▶ Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände.
Der Platz explodiert uns.
- ▶ Geht es besser? Nicht wirklich.

Lemma

Sei $L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ für $\Sigma = \{a, b\}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$
(d.h. die Sprache aller Wörter aus Σ^* , die an n -letzter Stelle ein a haben).

1. Es gibt einen **NFA** M mit $L(M) = L$ und M hat $n + 1$ **Zustände**.
2. Jeder **DFA** M' mit $L(M') = L$ hat mindestens 2^n **Zustände**.

Größe des DFA vs. NFA

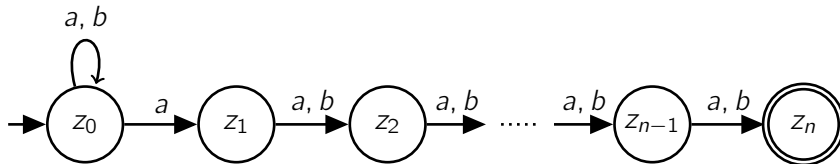
Lemma

Sei $L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ für $\Sigma = \{a, b\}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$
(d.h. die Sprache aller Wörter aus Σ^* , die an n -letzter Stelle ein a haben).

1. Es gibt einen **NFA** M mit $L(M) = L$ und M hat $n + 1$ Zustände.
2. Jeder **DFA** M' mit $L(M') = L$ hat mindestens 2^n Zustände.

Beweis

1. Sei M der folgende NFA:



Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\tilde{\delta}(z_0, w) = \tilde{\delta}(z_0, w') = z$.

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\tilde{\delta}(z_0, w) = \tilde{\delta}(z_0, w') = z$.

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\tilde{\delta}(z_0, w) = \tilde{\delta}(z_0, w') = z$.

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$. Da $\tilde{\delta}(z_0, uav) = \tilde{\delta}(z_0, ubv') = z$, muss dann gelten $\tilde{\delta}(z_0, uavb^{j-1}) = \tilde{\delta}(z_0, ubv'b^{j-1}) = z'$ für einen Zustand z' .

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

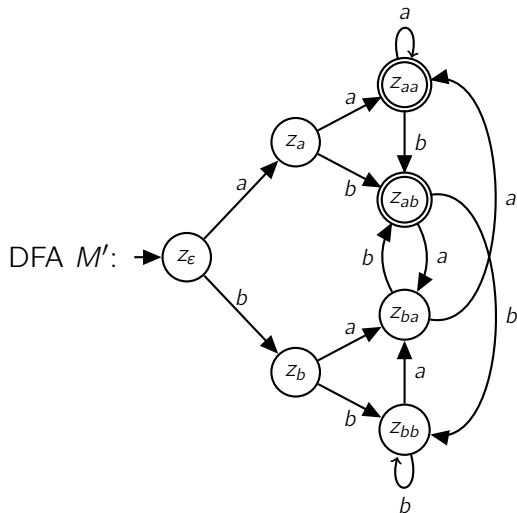
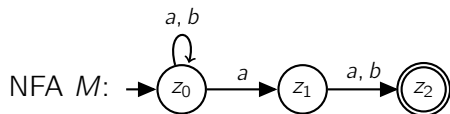
Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\tilde{\delta}(z_0, w) = \tilde{\delta}(z_0, w') = z$.

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

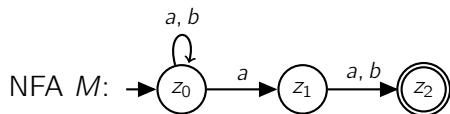
w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$. Da $\tilde{\delta}(z_0, uav) = \tilde{\delta}(z_0, ubv') = z$, muss dann gelten $\tilde{\delta}(z_0, uavb^{j-1}) = \tilde{\delta}(z_0, ubv'b^{j-1}) = z'$ für einen Zustand z' .

Aber $uavb^{j-1} \in L$ und $ubv'b^{j-1} \notin L$, daher $z' \in E$ und $z' \notin E$. Widerspruch. $\square$

Beispiel wenn $n = 2$



Beispiel wenn $n = 2$



DFA M' (minimiert):

