Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 26.06.2025 bis 30.06.2025
Abgabe bis 07.07.2025, 10:00 Uhr

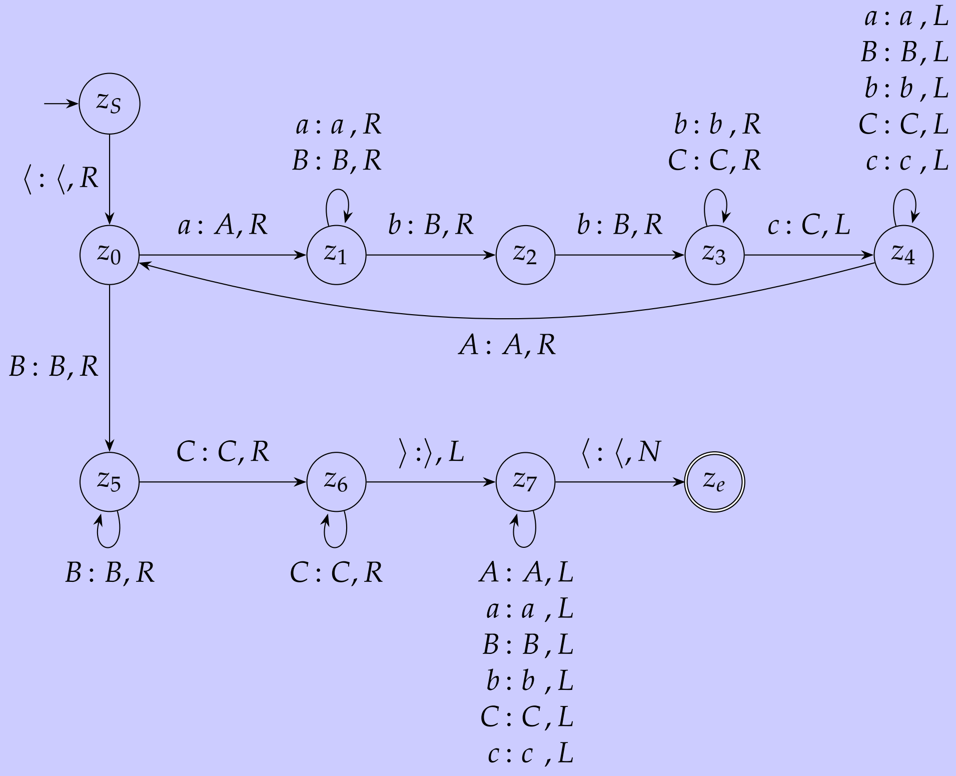
Lösungsvorschlag zur Übung 8 zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

TIMI8-1 ***LBAs***

Wir betrachten die Sprache $L = \{a^n b^{2n} c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$.

a) Geben Sie einen Zustandsgraphen für einen LBA an, der L erkennt.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
LBA: `http://turingmachinesimulator.com/shared/odgepbeprk`
Hierbei müssen Sie manuell $<$ anstelle $\langle$ und $>$ anstelle $\rangle$ um das Eingabewort schreiben.



b) Geben Sie eine Definition dafür an, dass ein LBA “deterministisch” ist in dem Sinne wie wir es für die anderen Konstrukte dieser Vorlesung getan haben.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Ein LBA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \langle, \rangle, E)$ ist deterministisch g.d.w. $|\delta(z, a)| = 1$ für alle $z \in Z, a \in \Gamma$.

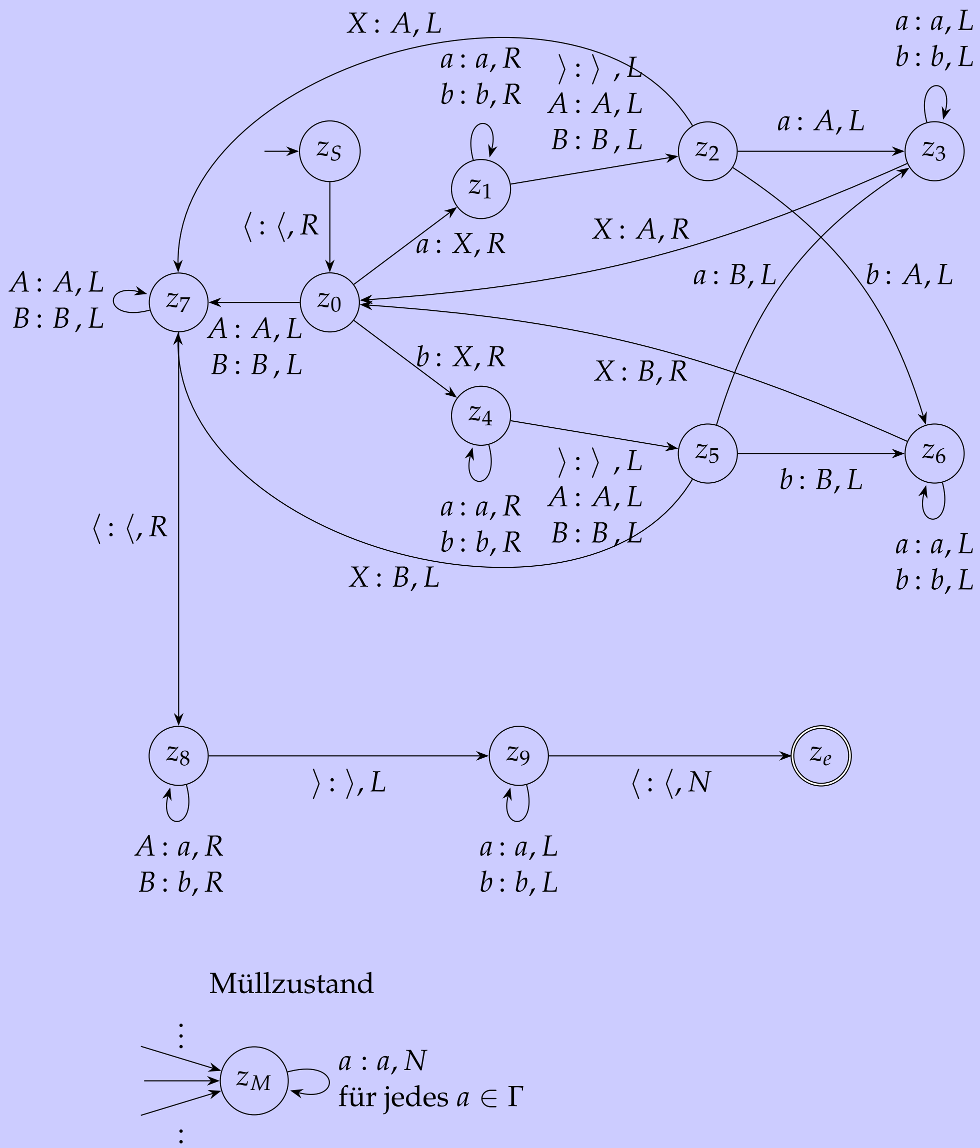
c) Geben Sie eine Definition dafür an, dass ein nach Ihrer Definition aus b) deterministischer LBA eine Funktion berechnet. Orientieren Sie sich dabei an der entsprechenden Definition für deterministische Turingmaschinen.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Ein LBA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \langle, \rangle, E)$ berechnet eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, wenn für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt: $f(u) = v$ g.d.w.

$$z_0\langle u\rangle \vdash^* \square \cdots \square z_e \langle v \rangle \square \cdots \square \text{ mit } z_e \in E.$$

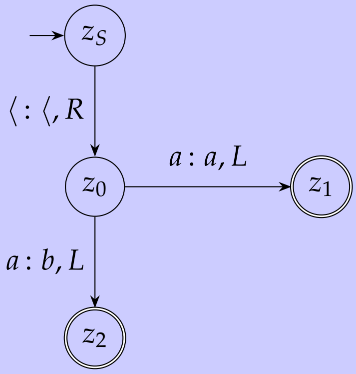
d) Geben Sie den Zustandsgraphen eines nach Ihrer Definition aus b) deterministischen LBA an, der nach Ihrer Definition aus c) die Funktion $f(w) = \overline{w}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ berechnet.

LÖSUNGSVORSCHLAG:



e) Warum ist es für die Definition aus c) notwendig, dass der LBA deterministisch ist?

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Ein nichtdeterministischer LBA könnte eine "Funktion" definieren, welche für denselben Input mehrere Outputs hat. Dies ist dann aber keine Funktion im mathematischen Sinne.



Beispiel:

TIMI8-2 ***Turingmaschinen***

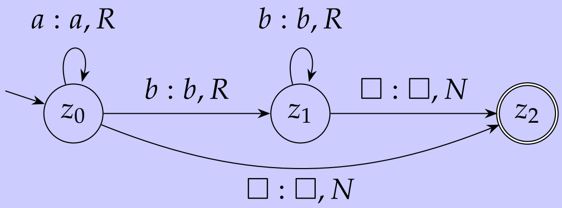
a) Seien $M = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ und $N = L(a^*b^*)$ Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$.
Zeigen Sie, dass es eine Funktion f gibt mit $\forall x \in \Sigma^* \,.\, x \in M \iff f(x) \in N$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

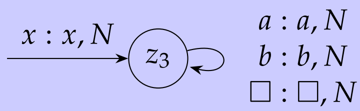
$$f(x) = \begin{cases} ab & \text{wenn } \#_a(x) = \#_b(x) \\ ba & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, welche N erkennt.

LÖSUNGSVORSCHLAG:



Fehlende Übergänge mit $x \in \{a, b, \square\}$:



c) Was muss für f gelten, damit man daraus folgern kann, dass M von einer Turingmaschine erkannt werden kann (ohne die Turingberechenbarkeit von M direkt zu zeigen)?

LÖSUNGSVORSCHLAG: f muss turingberechenbar sein. Sei F die passende Turingmaschine. Dann kann man M erkennen, indem man zunächst F ausführt und danach die Turingmaschine für N ausführt. Wie wir im Laufe der Vorlesung sehen werden, nennt man f in diesem Fall eine Reduktionsfunktion, für eine Reduktion von M auf N.