Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Besprechung 17.07.2025 bis 21.07.2025
Abgabe bis 28.07.2025, 10:00 Uhr

Übung 11 zur Vorlesung

Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

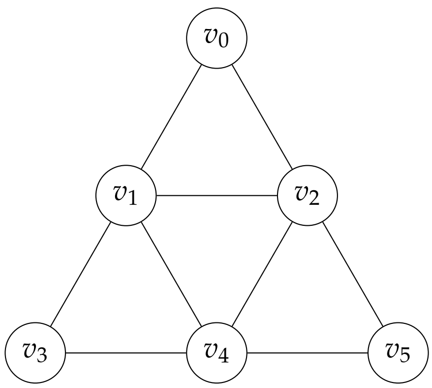
Hinweis:
Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Beabeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

TIMI11-1 *$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von Graphenproblemen*

Der Graph G sei:



a) Das Independent-Clique-Problem (ICP) beantwortet für einen Graphen G und eine natürliche Zahl n die Frage, ob es in G eine Clique C der Größe n und eine unabhängige Knotenmenge I der Größe n gibt, sodass $|C \cap I| = 1$ gilt.

   Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in \text{ICP}$ gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Das Well-Liked-Clique-Problem (WLCP) beantwortet für einen Graphen G und eine natürliche Zahl n die Frage, ob es in G eine Clique C der Größe n gibt, sodass es für alle Knoten v in $G \setminus C$ einen Knoten u in C gibt, sodass $(u, v) \in E$. (Oder in Worten: Wenn es eine Clique der Größe n gibt, sodass alle Knoten außerhalb der Clique mit mindestens einem Knoten innerhalb der Clique verbunden sind.)

   Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in$ WLCP gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Zeigen Sie, dass ICP $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

TIMI11-2 ***SAT-Varianten in $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$*** (0 Punkte)

a) Sei UNSAT $= \{F \mid F$ ist eine widersprüchliche Formel$\}$. Nehmen Sie an, dass UNSAT in $\mathcal{NP}$ ist.

   Wir betrachten folgende Reduktionsfunktion von SAT auf UNSAT: Teste alle möglichen Variablenbelegungen der Formel. Wenn eine erfüllende Variablenbelegung gefunden wurde, gib $x \wedge \neg x$ zurück, ansonsten x.

   Ist diese Reduktionsfunktion geeignet, um zu zeigen, dass UNSAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei 3mal-3SAT $= \left\{ F \,\middle|\, \begin{array}{l} F \text{ ist eine 3-CNF und hat mindestens} \\ \text{3 verschiedene erfüllende Belegungen} \end{array} \right\}$.

   Zeigen Sie, dass 3mal-3SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist, wobei Sie für den Nachweis der $\mathcal{NP}$-Schwere eine Reduktion von 3-CNF-SAT auf 3mal-3SAT durchführen.

   Hinweis: Was könnten Sie in der benötigten Reduktionsfunktion f hinzufügen, um aus einer erfüllenden Belegung drei erfüllende Belegungen zu erzeugen?

c) Sei Pos-3-SAT $= \left\{ F \,\middle|\, \begin{array}{l} F \text{ ist eine erfüllbare 3-CNF, in der ausschließlich} \\ \text{positive Literale vorkommen} \end{array} \right\}$.

   i) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{P}$?
   ii) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{NP}$?

   Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

Klausurvorbereitung TIMI-11-K

a) Zeigen Sie, dass das Well-Liked-Clique-Problem (WLCP) $\mathcal{NP}$-schwer ist, indem Sie das CLIQUE-Problem darauf reduzieren.