Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 24.04.2025 bis 28.04.2025
Keine Abgabe

Übung 0 zur Vorlesung

Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Hinweis: Dieses Blatt wird nicht abgegeben, aber es wird in den Übungen von 24.04.2025 bis 28.04.2025 besprochen.

TIMI0-1 *Wörter, Sprachen*

Für die folgenden Aufgaben benötigen wir einige grundlegende Definitionen aus der Theorie der formalen Sprachen, die wir hier nur kurz angeben. In der ersten Vorlesung wird genauer auf sie eingegangen.

- Ein **Alphabet** Σ ist eine endliche, nicht leere Menge von Symbolen.
- Ein **Wort** w über Σ ist eine endliche Folge von Zeichen aus Σ. Wir bezeichnen das **leere Wort** mit ε.
- Eine Menge von **Wörtern** über einem Alphabet Σ ist eine **Sprache** über Σ.

a) Betrachten Sie die Alphabete $\Sigma_1 = \{a, b, c, d\}$ und $\Sigma_2 = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$. Geben Sie jeweils drei Wörter über Σ_1 und Σ_2 an.

b) Betrachten Sie die Sprachen $U = \{aab, baa\}$ und $V = \{aa, bb\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Für eine Sprache L bezeichnen wir mit L^* die Menge aller Wörter, die durch beliebige Konkatenationen aus Wörtern der Sprache L gebildet werden können, wobei das leere Wort ε inbegriffen ist. Geben Sie Wörter u, v, w, x über Σ an, sodass

- $u \in U^*$ und $u \notin V^*$;
- $v \notin U^*$ und $v \in V^*$;
- $w \in U^*$ und $w \in V^*$;
- $x \notin U^*$ und $x \notin V^*$.

c) Sei $w = ababababbbbccbaaaaaaabacaabbbbbbaba$.

Geben Sie alle Teilwörter v von w an, auf die **alle** der folgenden Eigenschaften zutreffen:

- $|v| = 4$, die Länge von v ist 4;
- $v[1] = a$, das erste Symbol in v ist a;
- $\#_b(v) > 0$, die Anzahl von Vorkommnissen von b in v ist größer als 0.

TIMI0-2 ***Fundamentale Beweisstrategien***

In dieser Aufgabe diskutieren wir fundamentale Beweisstrategien. Diese Strategien sollten aus anderen Kursen bekannt sein, aber da TIMI sehr beweislastig ist, wiederholen wir sie hier.

a) Die folgende Tabelle fasst zusammen, wie man mit Aussagen, die bestimmte logische Operationen enthalten, umgeht.

	Um eine Aussage dieser Form zu beweisen...	Wenn eine Aussage dieser Form angenommen wird...
$P \wedge Q$	beweise sowohl P als auch Q	nimm P und Q an
$P \vee Q$	beweise entweder P oder Q	beweise die gewünschte Aussage sowohl unter der Annahme P als auch unter der Annahme Q (Fallunterscheidung)
$P \implies Q$	beweise, dass unter der Annahme P Q folgt	beweise P und nimm dann Q an
$\neg P$	beweise, dass unter der Annahme P ein Widerspruch folgt	beweise P, um einen Widerspruch herzuleiten
$\forall x,\ P(x)$	beweise, dass $P(a)$ für ein beliebiges a gilt	nimm $P(a)$ für jedes konkrete a an
$\exists x,\ P(x)$	gib ein konkretes a an und beweise $P(a)$	nimm ein beliebiges a an, für das $P(a)$ gilt

Die Biimplikation $P \iff Q$ („P genau dann wenn Q“ oder „P g.d.w. Q“) ist definiert als $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Außerdem kann man, unabhängig von der zu beweisenden Aussage, immer folgende Regeln anwenden:

- Widerspruchsbeweis: um P zu beweisen nimm an, dass $\neg P$ gilt, und leite daraus einen Widerspruch ab.
- Satz vom ausgeschlossenen Dritten: für jede beliebige Aussage P nimm $P \vee \neg P$ an.

Häufig nützlich sind auch folgende Regeln:

$$
\begin{aligned}
\neg(A \land B) &\iff \neg A \lor \neg B \\
\neg(A \lor B) &\iff \neg A \land \neg B \\
\neg\forall x,\, P(x) &\iff \exists x,\, \neg P(x) \\
\neg\exists x,\, P(x) &\iff \forall x,\, \neg P(x) \\
A \land (B \lor C) &\iff (A \land B) \lor (A \land C) \\
A \lor (B \land C) &\iff (A \lor B) \land (A \lor C) \\
(\forall x,\, P(x)) \land (\forall x,\, Q(x)) &\iff \forall x,\, P(x) \land Q(x) \\
(\exists x,\, P(x)) \lor (\exists x,\, Q(x)) &\iff \exists x,\, P(x) \lor Q(x) \\
\neg\neg A &\iff A
\end{aligned}
$$

i) Zeigen Sie: $(\forall n,\, \exists k,\, k > n) \iff (\neg\exists n,\, \forall k,\, n \geq k)$

ii) Für alle Sprachen A, B, C über einem Alphabet Σ gilt: $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$.

iii) Gilt die Aussage $\forall n,\, \exists k,\, k > n$
   - für $n, k \in \mathbb{N}$?
   - für $n, k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei $\infty > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

   Beweisen Sie Ihre Antworten.

b) Die Gleichheit von Mengen ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
S \subseteq T &\text{ g.d.w. } \forall x,\, x \in S \Longrightarrow x \in T \\
S = T &\text{ g.d.w. } S \subseteq T \land T \subseteq S
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie:

i) Für alle Mengen S und T gilt: $S = T$ g.d.w. $\forall x,\, x \in S \iff x \in T$.

ii) Für alle Sprachen A, B, C über einem Alphabet Σ gilt: $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$.

c) Die Konkatenation $v \cdot w$ (alternativ vw) zweiter Wörter über einem Alphabet Σ ist rekursiv definiert durch

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \cdot w &= w \\
av \cdot w &= a(v \cdot w)
\end{aligned}
$$

Alternativ kann man diese Definition auch so schreiben:

$$
v \cdot w = \begin{cases} w & \text{falls } v = \varepsilon \\ a(v' \cdot w) & \text{falls } v = av' \end{cases}
$$

Zeigen Sie, dass für alle Wörter u, v, w gilt: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$. Verwenden Sie vollständige Induktion (siehe Skript, Kapitel 2) über die Länge von u.

TIMI0-3 ***Äquivalenzrelationen***

Eine Relation zwischen zwei Mengen M, N ist eine Menge $R \subseteq M \times N$ von Paaren bestehend je aus einem Element aus M und einem aus N. M und N können hierbei beliebige Mengen sein. Ist $(p, q) \in R$, so schreibt man auch $R(p, q)$, pRq oder $p \sim_R q$.

Ist klar, um welche Relation es sich handelt, kann man auch $p \sim q$ schreiben.

Eine Relation R heißt Äquivalenzrelation, wenn

- die zugrundeliegenden Mengen gleich sind: $M = N$;
- für alle $x \in M$ gilt xRx (d.h. R ist reflexiv);
- für alle $x, y \in M$ gilt $xRy \Longrightarrow yRx$ (d.h. R ist symmetrisch);
- für alle $x, y, z \in M$ gilt $xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$ (d.h. R ist transitiv).

Eine Äquivalenzklasse K einer Äquivalenzrelation R ist eine maximale Menge von Elementen $u, v, w, \ldots \in M$ sodass alle Elemente von K durch R in Beziehung stehen: uRv, uRw, vRu, vRw, etc. „Maximal“ bedeutet, dass es kein Element $x \in M$ gibt, das nicht in K ist, aber mit allen Elementen von K in Beziehung steht. Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beispiel: Die Relation

$$\{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \text{ geteilt durch 3 hat denselben Rest}$$
$$\text{wie } v \text{ geteilt durch } 3\}$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind $\{0, 3, 6, \ldots\}$, $\{1, 4, 7, \ldots\}$ und $\{2, 5, 8, \ldots\}$. Sie hat somit Index 3.

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Berechnen Sie außerdem den Index von mindestens zwei der Äquivalenzrelationen.

a) $R_1 \subseteq \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ mit $0R_11$, $2R_13$ (und sonst $\neg xR_1y$).

b) $R_2 \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ mit $0R_20$, $1R_21$, $2R_22$ (und sonst $\neg xR_2y$).

c) $R_3 \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ mit $0R_30$, $1R_31$, $2R_32$, $1R_32$, $2R_31$ (und sonst $\neg xR_3y$).

d) $R_4 = \{(p, q) \mid \text{die Personen } p, q \text{ haben das gleiche Geburtsjahr}\}$.