Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 20.06.2025 bis 23.06.2025
Abgabe bis 30.06.2025, 10:00 Uhr

Lösungsvorschlag zur Übung 7 zur Vorlesung

Formale Sprachen und Komplexität

FSK7-1 ***Sprachen einordnen***

Die formalen Sprachen L_i, $i \in \{0, \ldots, 3\}$, seien definiert als

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{ab^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c^i a \mid i \in \mathbb{N}\} && \subseteq \{a, b, c\}^* \\ L_2 &:= \{(ab)^j \$ c^i \mid i, j \in \mathbb{N}\} && \subseteq \{a, b, c, \$\}^* \\ L_3 &:= \{(ab)^i \$ c^j \$ (ab)^i \mid j < i \text{ und } i, j \in \mathbb{N}\} && \subseteq \{a, b, c, \$\}^* \end{aligned}$$

Für die i-fache Wiederholung des Worts w schreiben wir manchmal $(w)^i$ statt nur w^i, um Anfang und Ende von w zu markieren. Die Klammern sind daher *nicht* Teil des Alphabets der jeweiligen Sprachen.

Bearbeiten Sie die folgenden Arbeitsaufträge für jede der Sprachen L_i.

a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i regulär ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i deterministisch kontextfrei ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i kontextfrei ist.

Hinweis: Nutzen Sie, dass manche Aussagen direkt aus anderen Aussagen folgen. Um zu beweisen, dass L_i regulär/deterministisch kontextfrei/kontextfrei ist, genügt es, ein geeignetes Konstrukt K_i (Grammatik, Automat oder regulärer Ausdruck) anzugeben und kurz zu begründen, warum $L(K_i) = L_i$ gilt.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- $L_1 = \{ab^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c^i a \mid i \in \mathbb{N}\} = L(ab^*) \cup L(c^*a)$ ist regulär (und damit auch kontextfrei und deterministisch kontextfrei), da die Sprache von einer Vereinigung regulärer Ausdrücke erzeugt wird. Jedes Wort der Sprache ist entweder aus ab^* oder aus c^*a, da beide i's unabhängig voneinander sind. Wir nutzen hierbei, dass reguläre Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen sind.
- $L_2 = \{(ab)^j \$ c^i \mid i, j \in \mathbb{N}\} = L((ab)^* \$ c^*)$ ist regulär (und damit auch deterministisch kontextfrei und kontextfrei), da die Sprache von einem regulären Ausdruck erzeugt wird. Jedes Wort der Sprache besteht erst aus belieblig

vielen ab's gefolgt von \$ und endet mit beliebig vielen c.

- L_3 ist nicht kontextfrei und damit auch nicht regulär oder deterministisch kontextfrei. Wir widerlegen die Kontextfreiheit mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

  Der Beweis ist durch Widerspruch. Wir nehmen an, L_3 ist kontextfrei, d.h. die Pumping-Eigenschaft gilt für L_3.

  Gegeben sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wählen $z = (ab)^{2n}\$c^n\$(ab)^{2n}$. Dann gilt $|z| \geq n$ und $z \in L_3$.

  Sei $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung von z mit $|vwx| \leq n$, $|vx| > 0$ und $uv^iwx^iy \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

  Wenn vx das Symbol \$ enthält, dann gilt $uv^2wx^2y \notin L_3$, da $\#_{\$}(uv^2wx^2y) > 2$. Sonst enthält vx entweder c oder a und b aus genau einem der beiden $(ab)^{2n}$-Blöcke.

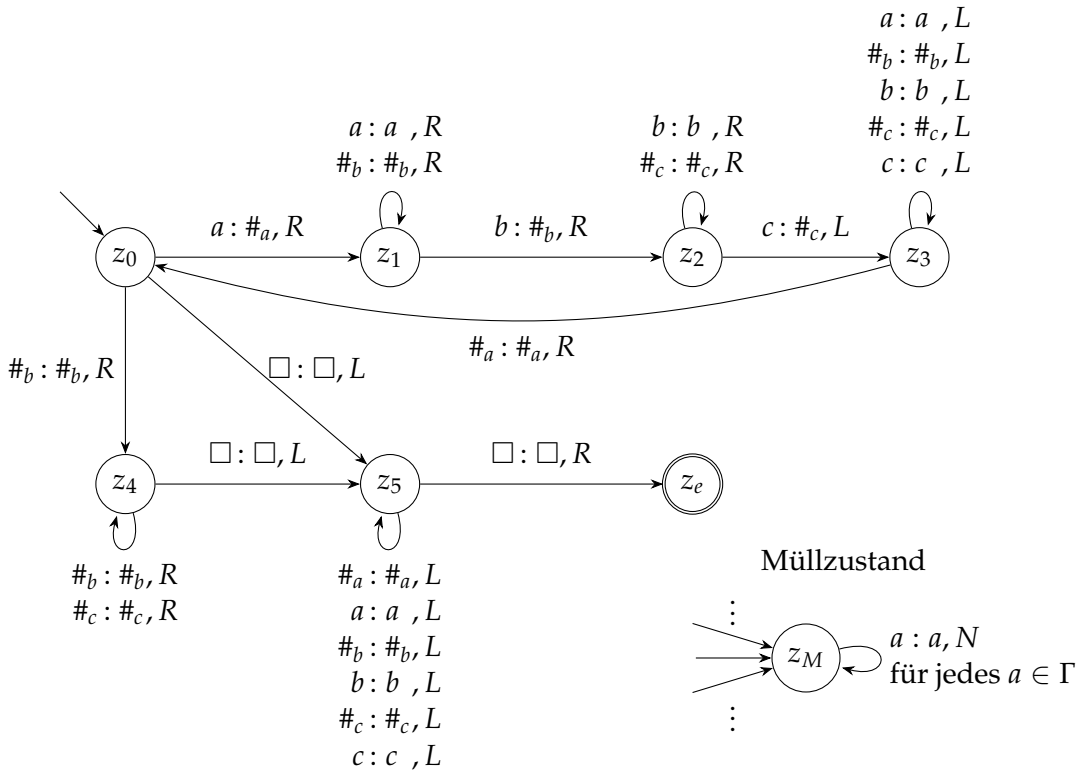
  Enthält vx nun c, so wählen wir $i = 2n$ und damit ist $\#_c(uv^iwx^iy) \geq 3n - 1 \geq 2n$ aber vx enthält a und b aus höchstens einem $(ab)^{2n}$-Block (da $vwx \leq n$) und somit ist mindestens einer der beiden $(ab)^{2n}$-Blöcke zu klein um $j < i$ zu erfüllen. Somit gilt $uv^iwx^iy \notin L_3$. Dies verletzt aber die Annahme, dass $uv^iwx^iy \in L_3$ für jedes i. Widerspruch.

  Enthält vx kein c, dann muss vx aufgrund von $|vx| > 0$ mindestens ein a oder b aus genau einem der $(ab)^{2n}$-Blöcke entalten, da $|vwx| \leq n$. Dann wählen wir $i = 0$, womit in uv^iwx^iy genau einer der $(ab)^{2n}$-Blöcke weniger als $4n$ Symbole enthält und damit gilt $uv^iwx^iy \notin L_3$. Dies verletzt aber die Annahme, dass $uv^iwx^iy \in L_3$ für jedes i. Widerspruch.

  L_3 ist somit nicht kontextfrei (und damit auch nicht deterministisch kontextfrei und nicht regulär).

FSK7-2 ***Turingmaschinen verstehen***

Die folgende DTM M ist als Zustandsgraph gegeben, wobei $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\#_a, \#_b, \#_c, \square\}$ und $\square$ das Blank-Symbol ist.



LÖSUNGSVORSCHLAG:
Simulator: `http://turingmachinesimulator.com/shared/pvchzxkffi`

a) Geben Sie Läufe der Turingmaschine (Übergänge von der Startkonfiguration bis zur Endkonfiguration) für die Wörter ε, $abcc$ und abc an.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- $z_0\square \vdash z_5\square \vdash z_e\square$
- $z_0abcc \vdash \#_a z_1 bcc \vdash \#_a\#_b z_2 cc \vdash \#_a z_3\#_b\#_c c \vdash z_3\#_a\#_b\#_c c$
  $\vdash \#_a z_0\#_b\#_c c \vdash \#_a\#_b z_4\#_c c \vdash \#_a\#_b\#_c z_4 c \vdash \#_a\#_b\#_c z_M c \vdash \cdots$
- $z_0abc \vdash \#_a z_1 bc \vdash \#_a\#_b z_2 c \vdash \#_a z_3\#_b\#_c \vdash z_3\#_a\#_b\#_c$
  $\vdash \#_a z_0\#_b\#_c \vdash \#_a\#_b z_4\#_c \vdash \#_a\#_b\#_c z_4\square \vdash \#_a\#_b z_5\#_c$
  $\vdash \#_a z_5\#_b\#_c \vdash z_5\#_a\#_b\#_c \vdash z_5\square\#_a\#_b\#_c \vdash z_e\#_a\#_b\#_c$

b) Welche Sprache akzeptiert die Turingmaschine M? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Die Turingmaschine akzeptiert $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dazu geht sie wie folgt vor:

- In den Zuständen z_0, z_1 und z_2 wird ein a, dann ein b und dann ein c gesucht, wobei jeweils ein gefundener Buchstabe x durch $\#_x$ ersetzt wird. Dabei überspringt die TM in z_1 nur a's und $\#_b$'s und in z_2 nur b's und $\#_c$'s, das heißt es müssen tatsächlich zuerst die a's, dann die b's und dann die c's im Wort auftreten.
- Im Zustand z_3 fährt die TM zurück zum ersten a, das noch nicht verarbeitet wurde. Somit werden in einer Schleife alle a's mit b's und c's gepaart.
- Wenn die TM in z_0 ein $\#_b$ liest, sind alle a's abgearbeitet. Wir müssen dann nur noch sicherstellen, dass keine b's oder c's mehr im Wort sind, und laufen deswegen mit z_4 noch einmal über $\#_b$'s und $\#_c$'s bis an das Wortende.
- Wenn das gelingt, fahren wir mit z_5 wieder an den Anfang des Wortes und akzeptieren.
- Spezialfall: Wenn wir in z_0 ein $\square$ lesen, ist das Wort leer und wir akzeptieren via z_4 und z_5 sofort.

c) Die obige Turingmaschine M mit Alphabet Σ und Bandalphabet Γ berechnet eine (partielle) Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, wenn für alle $u \in \Sigma^*$ und $v \in \Gamma^*$ gilt: $f(u) = v$ g.d.w. $z_0 u \vdash_M^* \square \cdots \square z_e v \square \cdots \square$ mit z_e Endzustand. (Beachten Sie: Diese Definition weicht leicht von der aus der Vorlesung ab, weil die Wertemenge von f nicht Σ^* ist, sondern Γ^*.)

Welche Funktion berechnet M?

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Wie in Teilaufgabe b) gezeigt, erkennt M genau die Wörter der Form $a^n b^n c^n$. Im Endzustand sind dabei alle $a's$ durch $\#_a$'s ersetzt und analog für b und c. Somit berechnet M folgende Funktion f:

$$f(w) = \begin{cases} \#_a^n \#_b^n \#_c^n & \text{für } w = a^n b^n c^n \\ \text{undefiniert} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

d) Bestimmen Sie asymptotisch, also in O-Notation, die Anzahl der Schritte (abhängig von n), die die Turingmaschine braucht, um das Wort $w = a^n b^n c^n$ zu

erkennen.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Wir zählen die Schritte eines erfolgreichen Laufs auf w.

- Von z_0 zu z_1 kommen wir in einem Schritt, der asymptotisch vernachlässigbar ist. Von z_1 zu z_2 und z_2 zu z_3 kommen wir in jeweils n Schritten (da wir immer das i-te a mit dem i-ten b und i-ten c paaren), also insgesamt in $2n$ oder $O(n)$ Schritten.
- Von z_3 zu z_0 kommen wir in mindestens $2n$ und höchstens $3n$, also $O(n)$ Schritten.
- Die Schleife von z_0 bis z_3 wird n-mal durchlaufen. Da jeder Durchlauf $O(n)$ Schritte benötigt, benötigt die gesamte Schleife $O(n^2)$ Schritte.
- Via z_4 laufen wir noch einmal in $2n$, also $O(n)$, Schritten über das ganze Wort.
- Am Ende laufen wir noch in $3n$, also $O(n)$, Schritten zurück auf die Startposition.

Die gesamte Laufzeit ist also $O(n^2)$.

FSK7-3 ***Turingmaschinen erstellen*** Wir betrachten die Sprache $L = \{w \mid \#_b(w) > \#_c(w)\}$ über dem Alphabet $\{b, c\}$.

a) Erstellen Sie auf `https://turingmachinesimulator.com/` eine TM, die L erkennt. Geben Sie sowohl einen Link zur Maschine an als auch den „Programmtext“ der Maschine.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
TM: `http://turingmachinesimulator.com/shared/ndqrvoyaon`
Idee: Wir gehen von links nach rechts über das Wort. Für jedes b, das wir dabei finden, suchen wir nach rechts ein entsprechendes c, und für jedes c suchen wir ein b. Die von links abgearbeiteten b's und c's ersetzen wir durch X und markieren so den Teil des Wortes, den wir nicht mehr besuchen müssen. Die entsprechenden c's und b's ersetzen wir durch C's und B's, um zu markieren, dass sie bereits verwendet wurden. Wenn wir nach einem „Partner“ zu einem b suchen, aber keinen finden, also $\square$ lesen, akzeptieren wir das Wort, da es somit mindestens ein mehr b's als c's geben muss.

Genauer führen wir folgende Schritte in einer Schleife aus:

i) (z_0, Startzustand) Laufe nach rechts über das Wort und halte nach dem ersten b oder c an. Das gefundene b oder c wird dabei durch X ersetzt. Ist das erste Zeichen bereits ein b oder c, halte auf dem zweiten Zeichen.

ii) (z_1) Ist das gefundene Zeichen ein b, laufe nach rechts und ersetze das erste c durch ein C.

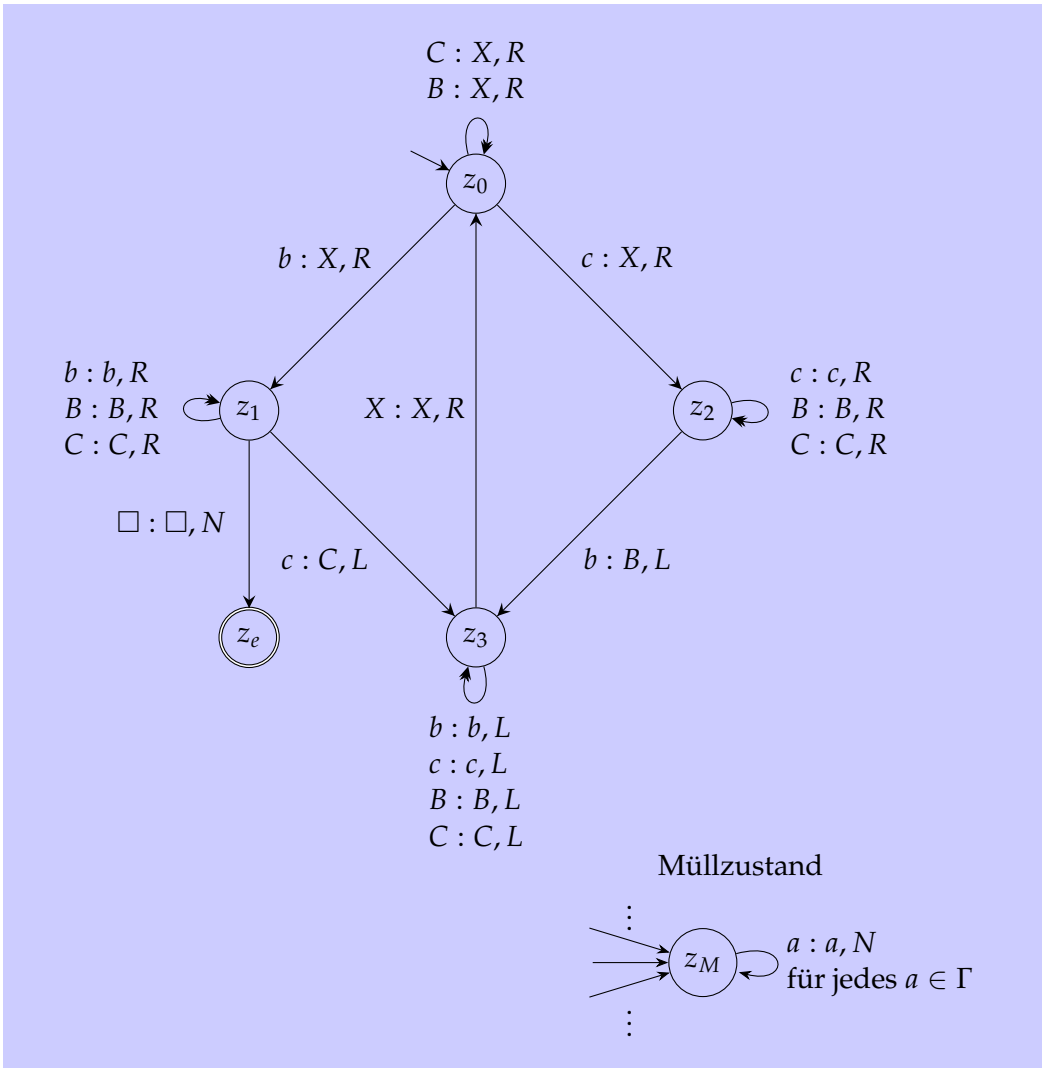
iii) (z_2) Ist das gefundene Zeichen ein c, suche entsprechend nach dem ersten b und ersetze es durch ein B.

iv) (z_3) Laufe nach links über das Wort und halte rechts des ersten X.

Wir akzeptieren, wenn wir in z_1 $\square$ lesen, es also kein c zum bereits gelesenen b gibt. Als Optimierung ersetzen wir im ersten Schritt B und C durch X und verkürzen so den Teil des Wortes, den wir in den nächsten Durchläufen betrachten müssen. Das ist aber nicht nötig.

b) Geben Sie für Ihre TM aus Teilaufgabe a) einen Zustandsgraphen an.

LÖSUNGSVORSCHLAG:



c) Geben Sie die Läufe der folgenden Wörter auf Ihre TM aus Teilaufgabe a) an: ε, c, bcc, $cbcbb$.

Hinweis: Wörter, die nicht in L liegen, erzeugen eventuell unendliche Läufe. Geben Sie in solchen Fällen ein Präfix an, aus dem ersichtlich wird, dass der Lauf unendlich ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Für ε:

$$z_0\square \vdash z_M\square \vdash z_M\square \vdash \dots$$

Für c:

$$z_0c \vdash Xz_2\square \vdash Xz_M\square \vdash Xz_M\square \vdash \dots$$

Für *bcc*:

$$z_0bcc \vdash Xz_1cc \vdash z_3XCc \vdash Xz_0Cc \vdash XXz_0c \vdash XXXz_2\square \vdash XXXz_M\square \vdash XXXz_M\square \vdash \dots$$

Für *cbcbb*:

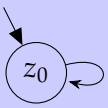
$$z_0cbcbb \vdash Xz_2bcbb \vdash z_3XBcbb \vdash Xz_0Bcbb \vdash XXz_0cbb \vdash XXXz_2bb \vdash XXz_3XBb \vdash XXXz_0Bb \vdash XXXXz_0b \vdash XXXXXz_1\square \vdash XXXXXz_e\square$$

FSK7-4 ***Konstruktion Grammatik zu PDA*** Sei $G = (V, \{a, b, c, d\}, P, S)$ eine Grammatik in Greibach-Normalform mit Produktionen

$$P = \{S \to aBCD,\ B \to bB \mid bC,\ C \to cCD \mid cD,\ D \to d\}$$

a) Erzeugen Sie gemäß der Konstruktion aus der Vorlesung aus G einen PDA M mit $L(M) = L(G)$, der mit leerem Keller akzeptiert.

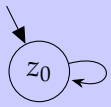
LÖSUNGSVORSCHLAG:
Zustandsgraph zu PDA M:



$(S, a) : BCD$
$(B, b) : B$
$(B, b) : C$
$(C, c) : CD$
$(C, c) : D$
$(D, d) : \varepsilon$

b) Erzeugen Sie gemäß der sogenannten Tripelkonstruktion aus der Vorlesung aus M eine kontextfreie Grammatik H mit $L(H) = L(M)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Zuerst formen wir M um sodass für alle Übergänge gilt, dass wir maximal 2 Symbole auf den Stack legen, hierfür verwenden wir die Konstruktion aus Lemma 5.7.12 im Skript:



$(S, a) : C_3D$
$(C_3, \varepsilon) : BC$
$(B, b) : B$
$(B, b) : C$
$(C, c) : CD$
$(C, c) : D$
$(D, d) : \varepsilon$

Sei $H = (V, \{a, b\}, P, S')$ mit Variablen

$$V = \{S', \langle z_0, S, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, C, z_0\rangle, \langle z_0, D, z_0\rangle, \langle z_0, C_3, z_0\rangle\}$$

und Produktionen

$$\begin{aligned} P = \{&S' \to \langle z_0, S, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, S, z_0\rangle \to a\langle z_0, C_3, z_0\rangle\langle z_0, D, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, C_3, z_0\rangle \to \langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, C, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, B, z_0\rangle \to b\langle z_0, B, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, B, z_0\rangle \to b\langle z_0, C, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, C, z_0\rangle \to c\langle z_0, C, z_0\rangle\langle z_0, D, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, C, z_0\rangle \to c\langle z_0, D, z_0\rangle, \\ &\langle z_0, D, z_0\rangle \to d\} \end{aligned}$$

c) Vergleichen Sie die Grammatiken G und H. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten dieser Grammatiken, sowie ihre Unterschiede.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Gemeinsamkeiten:

- Sie akzeptieren die gleiche Sprache (aufgrund der Konstruktion).
- Die Variablen aus G kommen in H prinzipiell wieder vor innerhalb der Tripel.
- Modulo Umbenennung der Variablen sind die Produktionen aus G alle in denen von H enthalten

Unterschiede:

- H enthält die zusätzliche Variablen S' und C_3 und allgemein haben alle Variablen die Tripelform. Die Tripel sind, da M nur einen Zustand hat, immer von der Form $\langle z_0, A, z_0\rangle$.
- Aufgrund der neuen Produktionen $S' \to \langle z_0, S, z_0\rangle$ und $\langle z_0, C_3, z_0\rangle \to \langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, C, z_0\rangle$ ist H nicht mehr in Greibach-Normalform.