

Übung 11 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

Hinweis:

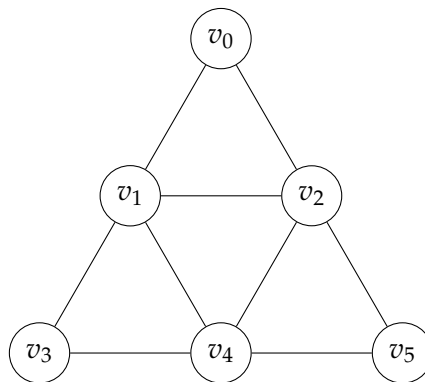
Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Bearbeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

FSK11-1 $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von Graphenproblemen

Der Graph G sei:



- a) Das Independent-Clique-Problem (ICP) beantwortet für einen Graphen G und eine natürliche Zahl n die Frage, ob es in G eine Clique C der Größe n und eine unabhängige Knotenmenge I der Größe n gibt, sodass $|C \cap I| = 1$ gilt.

Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in \text{ICP}$ gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

- b) Das Well-Liked-Clique-Problem (WLCP) beantwortet für einen Graphen G und eine natürliche Zahl n die Frage, ob es in G eine Clique C der Größe n gibt, sodass es für alle Knoten v in $G \setminus C$ einen Knoten u in C gibt, sodass $(u, v) \in E$. (Oder in Worten: Wenn es eine Clique der Größe n gibt, sodass alle Knoten außerhalb der Clique mit mindestens einem Knoten innerhalb der Clique verbunden sind.)

Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in \text{WLCP}$ gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

- c) Zeigen Sie, dass ICP $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

FSK11-2 Bunte Graphen Ein bunter Graph $G = (V, E, \text{col})$ ist ein ungerichteter Graph (V, E) , wobei jeder Knoten $v \in V$ mit einer Farbe $\text{col}(v) \in \{\text{blau, gelb, rot}\}$ versehen ist. Eine blaue k -Clique ist eine k -Clique deren Knoten alle blau sind, und entsprechend für gelbe und rote k -Cliquen.

Das Bunte-Cliquen-Problem (BCP) ist:

gegeben: Ein bunter Graph $G = (V, E, \text{col})$ und eine Zahl $k > 0$.
gefragt: Hat G eine blaue, eine gelbe und eine rote k -Clique?

Zeigen Sie, dass BCP $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

FSK11-3 $\mathcal{NP}$ -vollständiges Labyrinth

(0 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein Rätselspiel mit Labyrinthen.

Die Labyrinthe sind an einem Gitter ausgerichtet. Jeweils eine Kachel ist als Start-Kachel gekennzeichnet, eine als Ziel-Kachel. Zwischen je zwei benachbarten Kacheln liegt eine von drei Möglichkeiten vor:

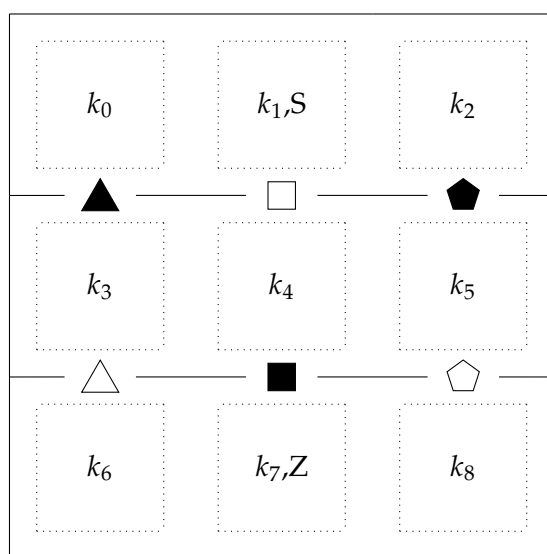
- undurchdringbare Wand
- passierbarer freier Weg
- eine schwarze oder weiße Tür, markiert mit einem Vieleck (drei oder mehr Ecken)

Die Regeln:

- Man muss einen Weg vom Start zum Ziel finden.
- Der Weg besteht aus einer Folge von Kacheln.
- Zwei im Weg aufeinanderfolgende Kacheln müssen benachbart sein (vertikal oder horizontal) und dürfen keine Wand zwischen sich haben.

- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn im Weg eine schwarze Tür genommen wurde, die mit einem k -Eck markiert ist, dann darf keine weiße mit einem k -Eck markierte Tür auf dem Weg liegen.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn im Weg eine weiße Tür genommen wurde, die mit einem k -Eck markiert ist, dann darf keine schwarze mit einem k -Eck markierte Tür auf dem Weg liegen.

- a) Betrachten Sie folgendes Labyrinth, wobei S für den Start und Z für das Ziel steht. Schwarze durchgehende Linien sind undurchdringbare Wände. Unterbrochene Linien stehen für die mit dem Symbol markierte Tür. Gepunktete Linien umranden die einzelnen Kacheln.



Bestimmen Sie alle möglichen Wege, in denen keine Kachel mehrmals genommen wird, um in diesem Labyrinth vom Start zum Ziel zu kommen.

Beschreiben Sie jeweils den Weg, indem Sie die Kachelfolge (die Abfolge der k .) angeben.

Wegbeispiel: k_1, k_4, k_7 ist wegen Benutzung einer weißen, wie auch einer schwarzen Quadrattür kein gültiger Weg. Alle anderen Regeln sind dabei aber eingehalten.

- b) Ein Labyrinth nennt man horizontal wandfrei, wenn es zwischen zwei horizontal benachbarten Kacheln immer einen passierbaren freien Weg gibt.

Zeigen Sie, dass die Frage, ob es in einem horizontal wandfreien Labyrinth einen Weg vom Start zum Ziel gibt, $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

Hinweis: 3-CNF-SAT ist ein geeignetes Problem für die Reduktion.

- c) Zeigen Sie, dass die Frage, ob es in einem beliebigen Labyrinth (das nicht horizontal wandfrei sein muss) einen Weg vom Start zum Ziel gibt, ebenfalls $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

FSK11-4 Beweise Prüfen II

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir jeweils einen Beweis, der einen Fehler enthält. Identifizieren Sie diesen Fehler (mit kurzer Begründung).

- a) Wir werden beweisen, dass 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

Da SAT in $\mathcal{NP}$ ist muss auch 3-CNF-SAT in $\mathcal{NP}$ sein. Wir zeigen $\text{SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}$. Sei F eine aussagenlogische Formel. Wir transformieren F in eine Formel in 3-CNF. Dazu ersetzen wir zuerst alle Formeln $A \Leftrightarrow B$ durch $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Dann ersetzen wir alle Formeln $A \Rightarrow B$ durch $\neg A \vee B$.

Nun negieren wir die Formel und nutzen die de-morganschen Gesetze und Double-Negation-Elimination so lange bis wir nur noch Literale, Konjunktion und Disjunktion vorhanden sind. Mithilfe der Distributivitäts-Gesetze formen wir nun die Formel so um, dass sie in disjunktiver Normalform ist, sie also eine mit Disjunktionen verbundene Menge von beliebig großen Konjunktionen ist.

Nun negieren wir die Formel nochmal, wodurch wir insgesamt $\neg\neg F$ erhalten, was nach den Gesetzen der klassischen Logik äquivalent ist zu F . Die äußere Negation können wir mithilfe zweischichtiger Anwendung der de-morganschen Gesetze so umformen, dass die Formel jetzt in konjunktiver Normalform, also CNF, ist. Um den letzten Schritt zu 3-CNF zu machen führen wir für jede Klausel $x_1 \vee \dots \vee x_k$ mit $k > 3$ Literalen $k - 3$ neue Variablen $z_1, \dots, z_{k-3}$ ein und ersetzen die Klausel durch

$$(x_1 \vee x_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee x_3 \vee z_2) \wedge \dots \wedge (\neg z_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$$

Damit haben wir nur durch Anwenden von Äquivalenzumformungen F in eine logisch äquivalente Formel F' in 3-CNF umgeformt. Da sie logisch äquivalent sind, ist F erfüllbar g.d.w. F' erfüllbar ist, somit gilt $\text{SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}$.

FSK11-5 SAT-Varianten in $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$

(0 Punkte)

- a) Sei $\text{UNSAT} = \{F \mid F \text{ ist eine widersprüchliche Formel}\}$. Nehmen Sie an, dass UNSAT in $\mathcal{NP}$ ist.

Wir betrachten folgende Reduktionsfunktion von SAT auf UNSAT: Teste alle möglichen Variablenbelegungen der Formel. Wenn eine erfüllende Variablenbelegung gefunden wurde, gib $x \wedge \neg x$ zurück, ansonsten x .

Ist diese Reduktionsfunktion geeignet, um zu zeigen, dass UNSAT $\mathcal{NP}$ -vollständig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

- b) Sei $3\text{mal-3SAT} = \left\{ F \mid \begin{array}{l} F \text{ ist eine 3-CNF und hat mindestens} \\ 3 \text{ verschiedene erfüllende Belegungen} \end{array} \right\}$.

Zeigen Sie, dass 3mal-3SAT $\mathcal{NP}$ -vollständig ist, wobei Sie für den Nachweis der $\mathcal{NP}$ -Schwere eine Reduktion von 3-CNF-SAT auf 3mal-3SAT durchführen.

Hinweis: Was könnten Sie in der benötigten Reduktionsfunktion f hinzufügen, um aus einer erfüllenden Belegung drei erfüllende Belegungen zu erzeugen?

- c) Sei $\text{Pos-3-SAT} = \left\{ F \mid \begin{array}{l} F \text{ ist eine erfüllbare 3-CNF, in der ausschließlich} \\ \text{positive Literale vorkommen} \end{array} \right\}$.

- i) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{P}$?
- ii) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{NP}$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

Klausurvorbereitung FSK-11-K

- a) Zeigen Sie, dass das Well-Liked-Clique-Problem (WLCP) $\mathcal{NP}$ -schwer ist, indem Sie das CLIQUE-Problem darauf reduzieren.
- b) Der folgende "Beweis" für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ enthält einen Fehler. Lokalisieren Sie den Fehler und geben Sie eine kurze Begründung, warum der Beweis falsch ist.

Das FRIENDS-Problem ist:

- gegeben: eine Menge an Personen Q und eine Menge von Freundesgruppen $F \subseteq \mathcal{P}(Q)$, also wenn $g \in F$ und $x_1, \dots, x_n \in g$, dann sind alle x_i miteinander befreundet
- gefragt: Gibt es eine Freundesgruppe mit Mindestgröße $m \in \mathbb{N}$?

Das FRIENDS-Problem ist in Polynomialzeit lösbar, indem F durchsucht und die Freundesgruppen nach ihrer Größe überprüft werden. Wir terminieren mit Wahr, wenn wir eine Gruppe größer oder gleich m finden, und mit Falsch, wenn wir alle Gruppen überprüft haben. Also $\text{FRIENDS} \in \mathcal{P}$ (und auch $\mathcal{NP}$).

Gleichzeitig ist das FRIENDS-Problem $\mathcal{NP}$ -schwer, da wir CLIQUE auf es reduzieren können: Für Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion f welche diesen in eine Instanz von FRIENDS umwandelt mit $Q := V$, $F := \{V' \mid V' \text{ ist eine Clique in } G\}$, $m := k$. Offensichtlich hat F ein Element von mindestens Größe m g.d.w. G eine k -Clique hat.

Damit gilt sowohl $\text{FRIENDS} \in \mathcal{P}$ als auch FRIENDS ist $\mathcal{NP}$ -schwer, somit gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.