

Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 10.07.2025 bis 14.07.2025
Abgabe bis 21.07.2025, 10:00 Uhr

Übung 10 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

Hinweis:

Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Bearbeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

FSK10-1 Satz von Rice

Sei $M = (Z, \{a, b\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine deterministische Turingmaschine. Welche der folgenden Fragestellungen zu M sind entscheidbar?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit unentscheidbarer Fragestellungen mittels des Satzes von Rice. Bei entscheidbaren Fragestellungen erläutern Sie, wie die charakteristische Funktion berechnet wird.

- a) Die Funktion die von M berechnet wird hat mindestens 3 Fixpunkte. Ein Fixpunkt einer Funktion $f : D \rightarrow D$ ist ein $x \in D$, sodass $f(x) = x$.
- b) Totalitätsproblem: Es gibt ein Wort $w \notin L(M)$.
- c) Hat M einen Müllzustand? Formal definieren wir einen Müllzustand hier als einen Zustand z , der kein Endzustand ist und für den gilt $\delta(z, a) \subseteq \{z\}$ für alle a .
- d) M terminiert auf jeder Eingabe nach zwischen 50 und 55 Schritten.

FSK10-2 PCP-Varianten

- a) Wir betrachten das PCP4-Problem, eine Variante von PCP, bei der die Spielsteine aus vier Wörtern bestehen. Eine Instanz von PCP4 ist also eine endliche Folge von 4-Tupeln $(x_1, y_1, z_1, u_1), \dots, (x_n, y_n, z_n, u_n)$ mit $x_i, y_i, z_i, u_i \in \Sigma^+$ für $i = 1, \dots, n$. Eine Lösung der Instanz K ist ähnlich zu PCP eine endliche Folge von Indizes $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m} = z_{i_1} \cdots z_{i_m} = u_{i_1} \cdots u_{i_m}$. Sind die folgenden Instanzen K_1, K_2 von PCP4 lösbar? Wenn ja, geben Sie eine Lösung (also eine geeignete Folge von Indizes) an. Wenn nein, beweisen Sie, dass die Instanz keine Lösung hat.

$$K_1 = \left(\begin{bmatrix} bbc \\ bca \\ cab \\ bbca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \\ abb \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} cca \\ ca \\ a \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ bcc \\ ccc \\ bcc \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \left(\begin{bmatrix} c \\ b \\ bab \\ cc \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} acb \\ baa \\ aaa \\ acba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} bca \\ caaaa \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ba \\ b \\ bab \end{bmatrix} \right)$$

- b) Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf PCP4, dass PCP4 unentscheidbar ist.
- c) Wir betrachten das 456PCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine‘ auf das Alphabet $\Sigma = \{4, 5, 6\}$ beschränkt sind. Eine Instanz von 456PCP ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \{4, 5, 6\}^+$ für $i = 1, \dots, n$. Eine Lösung der Instanz K ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indizes $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$. Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf 456PCP, dass 456PCP unentscheidbar ist.
- d) Für Mengen Σ und Δ nennen wir eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ einen *Homomorphismus* (siehe auch Aufgabe FSK6-4), wenn gilt:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$f(u \circ v) = f(u) \circ f(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^*$$

Wir definieren das Problem HOMPCP. Eine Instanz dieses Problem ist ein 4-Tupel (Σ, Δ, f, g) , wobei Σ und Δ endliche Mengen sind und $f, g : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ Homomorphismen. Eine Lösung der Instanz ist ein Wort $w \in \Sigma^+$ sodass gilt: $f(w) = g(w)$.

Wir betrachten außerdem das LPCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine‘ auch das leere Wort enthalten können. Eine Instanz von LPCP mit Alphabet Σ ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^*$

Σ^* für $i = 1, \dots, n$ (wohingegen bei PCP gilt: $x_i, y_i \in \Sigma^+$). Eine Lösung der Instanz K ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indices $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$. Das LPCP-Problem ist unentscheidbar.

Zeigen Sie durch Reduktion von LPCP auf HOMPCP, dass HOMPCP für $|\Delta| \geq 2$ unentscheidbar ist.

FSK10-3 Beweise prüfen

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir jeweils einen Beweis, der einen Fehler enthält. Identifizieren Sie diesen Fehler (mit kurzer Begründung).

- a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache

$$D = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

ist semi-entscheidbar.

Beweis:

D ist semi-entscheidbar. Um das zu zeigen, konstruieren wir eine DTM M , die D semi-entscheidet. Das heißt, dass M für alle Eingaben $w \in D$ hält und für alle Eingaben $w \notin D$ nicht hält.

Angenommen, es gäbe so eine Turingmaschine M . Betrachte ein Wort $w \in \{0, 1\}^*$.

- Wenn $w \in D$ ist, dann akzeptiert M_w die Eingabe w . Somit akzeptiert auch M das Wort w .
- Wenn $w \notin D$ ist, dann hält M_w mit Eingabe w nicht. Somit akzeptiert auch M das Wort w nicht.

M semi-entscheidet also D .

- b) Sei $L_u = \{w\#x \mid w, x \in \{0, 1\}^* \text{ und } x \in L(M_w)\}$. Diese Sprache ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Zeigen Sie: Die Sprache $L_r = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist regulär}\}$ ist unentscheidbar.

Beweis:

Wir reduzieren L_u auf L_r . Da L_u unentscheidbar ist, folgt daraus, dass L_r unentscheidbar ist.

Sei $v \in \{0, 1, \#\}^*$. Wir definieren die Reduktionsfunktion f durch

$$f(v) = \begin{cases} w_{M_3} & \text{falls } v = w\#x \text{ und } M_w \text{ akzeptiert } x \\ w_{M_4} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist M_3 eine Turingmaschine, die die reguläre Sprache $\{0, 1\}^*$ akzeptiert. M_4 ist eine Turingmaschine, die die nichtreguläre Sprache $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert. w_{M_i} ist die Binärkodierung der jeweiligen Turingmaschine.

M_3 , M_4 und die Binärkodierungen sind offensichtlich berechenbar, also ist f berechenbar (und offensichtlich total). Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & v \in L_u \\ \text{g.d.w. } & v = w\#x \text{ und } x \in L(M_w) \\ \text{g.d.w. } & M_{f(v)} \text{ akzeptiert eine reguläre Sprache} \\ \text{g.d.w. } & f(v) \in L_r \end{aligned}$$

Somit ist f eine valide Reduktionsfunktion und $L_u \leq L_r$.

FSK10-4 $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$

- Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ unter Vereinigung abgeschlossen ist.
- Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ unter Schnitt abgeschlossen ist.
- Zeigen Sie, dass $\mathcal{NP}$ unter Vereinigung abgeschlossen ist.
- Zeigen Sie, dass $\mathcal{NP}$ unter Schnitt abgeschlossen ist.

Klausurvorbereitung FSK-10-K

- Wir betrachten das EVENPCP-Problem, eine Variante von LPCP, bei der die Wörter auf den Spielsteinen gerade Länge haben müssen. Eine Instanz von EVENPCP ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ und } |w| \text{ gerade}\}$ für $i = 1, \dots, n$. Beispielsweise ist $(ab, aaba)$ ein erlaubter Spielstein; (ab, aab) aber nicht.

Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf EVENPCP, dass EVENPCP unentscheidbar ist.

- Sei $A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ hält bei Eingabe 36 mit Ausgabe 42 an}\}$. Der folgende Beweis zur Unentscheidbarkeit von A ist falsch. Lokalisieren Sie den Fehler und begründen Sie, wieso der Beweis falsch ist.

Beweis:

Wir zeigen $H_0 \leq A$. Da H_0 unentscheidbar ist, folgt daraus, dass auch A unentscheidbar ist.

Wir definieren die Reduktionsfunktion $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ wie folgt. Für $w \in \{0, 1\}^*$ berechnet f zunächst die Turingmaschine M_w , erstellt daraus eine Turingmaschine T und berechnet anschließend deren Binärkodierung w_T . Dabei verhält sich T wie folgt:

- Prüfe, ob auf dem Band die Zahl 36 (in Binärdarstellung) steht. Falls nein, gehe in eine Endlosschleife über.
- Führe M_w aus.
- Falls M_w anhält, schreibe die Zahl 42 (in Binärdarstellung) auf das Band und akzeptiere.

Die Funktion f ist offensichtlich total. Sie ist auch berechenbar, da T konstruierbar ist. Weiterhin gilt:

	$w \in H_0$
g.d.w.	M_w hält auf leerem Band
g.d.w.	$M_{f(w)}$ hält für Eingabe 36 mit Ausgabe 42
g.d.w.	$f(w) \in A$

Somit ist f eine valide Reduktionsfunktion und $H_0 \leq A$.