

Übung 9 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

Hinweis:

Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Bearbeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

FSK9-1 Halteprobleme

- a) Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 = \{w_M \in \{0,1\}^* \mid \text{TM } M \text{ hält für Eingabe } 01\}$$

wobei w_M das Encoding für M ist.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- L_1 ist entscheidbar.
- L_1 ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- L_1 ist weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

Um zu zeigen, dass L_1 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, beschreiben Sie kurz die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die L_1 (semi-)entscheidet. Um zu zeigen, dass L_1 nicht (semi-)entscheidbar ist, reduzieren Sie ein geeignetes Problem auf L_1 .

- b) Zeigen Sie, dass das folgende Problem für jede deterministische Turingmaschine M und natürliche Zahl n entscheidbar ist.

„ M hält auf jeder Eingabe nach höchstens n Schritten.“

FSK9-2 Entscheidbarkeit

Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten wie folgt: Wenn eine Sprache L (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die die charakteristische Funktion χ_L bzw. χ'_L berechnet. Wenn L nicht (semi-)entscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch ab.

- Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.
- Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.
- Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

FSK9-3 μ -Rekursion

Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Exponentiation und absolute Differenz $absdiff(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ primitiv rekursiv sind.

Zur Erinnerung: Wir unterscheiden hier die (modifizierte) Subtraktion und die absoluten Differenz $absdiff$. (Wir schreiben in der folgenden Aufgabe zur besseren Unterscheidung $\dot{-}$ für die modifizierte Subtraktion.) Bei der (modifizierten) Subtraktion $x_1 \dot{-} x_2$ wird im Fall $x_2 > x_1$ auf 0 abgebildet, d.h. $3 \dot{-} 4 = 0$. Bei der absoluten Differenz werden dagegen x_1 und x_2 als ganze Zahlen subtrahiert, d.h. $|3 - 4| = 1$.

- Berechnen Sie μg für folgende Funktionen g .
 - $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = 3x^2 + 5x + 3$
 - $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = (|x/2 - 4|)^2 \dot{-} 2$.
 - $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, g(x_1, x_2) = (x_1 + 1) \cdot x_2$
- Zeigen Sie, dass die Quadratwurzelfunktion

$$sqrt: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad sqrt(x_1) = \sqrt{x_1}$$

μ -rekursiv ist. Beachten Sie, dass die Quadratwurzel für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$sqrt(x_1) = n \iff n^2 = x_1$$

FSK9-4 Primitiv rekursive Prädikate

Primitiv rekursive Funktionen, die auf $\{0, 1\}$ abbilden, können auch als Prädikate aufgefasst werden. Wir betrachten in dieser Aufgabe nur einstellige Prädikate p , wobei $p(x) = 0$ bedeutet, dass x die Eigenschaft p nicht besitzt, und $p(x) = 1$ bedeutet, dass x die Eigenschaft p besitzt.

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion *iszero* ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$\text{iszero}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 > 0 \\ 1 & \text{für } x_1 = 0 \end{cases}$$

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion *even* ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$\text{even}(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } x_1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

- c) Zeigen Sie, dass die Funktion *ifnotzero* primitiv rekursiv ist.

$$\text{ifnotzero}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 > 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

- d) Zeigen Sie, dass die Funktion *ifthenelse* primitiv rekursiv ist, angenommen, dass $p(x)$ ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$\text{ifthenelse}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } p(x_1) \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

- e) Zeigen Sie, dass, gegeben zwei primitiv rekursive Prädikate p und q , auch die Konjunktion $p \wedge q$ primitiv rekursiv ist.

Klausurvorbereitung FSK-9-K

- a) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist unentscheidbar. Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit, indem sie H_0 darauf reduzieren. **Hinweis:** In früheren Versionen dieses Blattes gab es leider Tippfehler in der Angabe, und es sollte die Unentscheidbarkeit für das Problem $L(M) = \emptyset$ durch Reduktion auf H_0 gezeigt werden. Wir bitten diese beiden Fehler zu entschuldigen.

b) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion

$$\log: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad \log(x_1, x_2) = \log_{x_1} x_2$$

μ -rekursiv ist. Beachten Sie, dass der Logarithmus für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$\log(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2$$