

## 11c

 **$\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit**

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 3. Juli 2024  
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



## Definition

Für eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei die Klasse  $TIME(f(n))$  genau die Menge der Sprachen  $L$ , für die es eine stets anhaltende Mehrband-DTM  $M$  gibt mit  $L(M) = L$  und  $time_M(w) \leq f(|w|)$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

## Definition

Die Klasse  $\mathcal{P}$  ist definiert als

$$\mathcal{P} := \bigcup_{p \text{ Polynom}} TIME(p(n))$$

## Definition

Für eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei die Klasse  $\text{NTIME}(f(n))$  genau die Menge der Sprachen  $L$ , für die es eine stets anhaltende Mehrband-NTM  $M$  gibt mit  $L(M) = L$  und  $\text{ntime}_M(w) \leq f(|w|)$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

## Definition

Die Klasse  $\mathcal{NP}$  ist definiert als

$$\mathcal{NP} := \bigcup_{p \text{ Polynom}} \text{NTIME}(p(n))$$

## Wiederholung: $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$

---

Die Frage „Gilt  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  oder  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ?“ ist bis heute **ungelöst**.

- ▶  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$  ist klar.
- ▶ Es gibt gute Gründe,  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  zu vermuten.

# Bedeutung von $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$

---

Obwohl man die  $\mathcal{P}$ -vs.- $\mathcal{NP}$ -Frage nicht geklärt hat,  
will man wissen, wie schwer ein Problem ist:

# Bedeutung von $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$

---

Obwohl man die  $\mathcal{P}$ -vs.- $\mathcal{NP}$ -Frage nicht geklärt hat, will man wissen, wie schwer ein Problem ist:

- ▶ Wenn man weiß, dass das Problem in  $\mathcal{P}$  liegt, dann existiert ein **effizienter Algorithmus**.

# Bedeutung von $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$

---

Obwohl man die  $\mathcal{P}$ -vs.- $\mathcal{NP}$ -Frage nicht geklärt hat, will man wissen, wie schwer ein Problem ist:

- ▶ Wenn man weiß, dass das Problem in  $\mathcal{P}$  liegt, dann existiert ein **effizienter Algorithmus**.
- ▶ Wenn man nur weiß, dass das Problem in  $\mathcal{NP}$  liegt, dann kennt man nur Algorithmen, die in **deterministischer Exponentialzeit laufen**.

# Bedeutung von $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$

---

Obwohl man die  $\mathcal{P}$ -vs.- $\mathcal{NP}$ -Frage nicht geklärt hat, will man wissen, wie schwer ein Problem ist:

- ▶ Wenn man weiß, dass das Problem in  $\mathcal{P}$  liegt, dann existiert ein **effizienter Algorithmus**.
- ▶ Wenn man nur weiß, dass das Problem in  $\mathcal{NP}$  liegt, dann kennt man nur Algorithmen, die in **deterministischer Exponentialzeit laufen**.

Heute:  **$\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit**:

Zeige, dass ein gegebenes Problem zu den **schwersten Problemen** in  $\mathcal{NP}$  zählt.



## Definition

Seien  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  Sprachen.

Dann sagen wir  $L_1$  ist auf  $L_2$  **polynomiell reduzierbar** (geschrieben  $L_1 \leq_p L_2$ ), falls es eine **totale und in deterministischer Polynomialzeit berechenbare** Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  gibt, sodass für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ . Die Funktion  $f$  nennt man **Polynomialzeit-Reduktion**.

## Definition

Seien  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  Sprachen.

Dann sagen wir  $L_1$  ist auf  $L_2$  **polynomiell reduzierbar** (geschrieben  $L_1 \leq_p L_2$ ), falls es eine **totale und in deterministischer Polynomialzeit berechenbare** Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  gibt, sodass für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ . Die Funktion  $f$  nennt man **Polynomialzeit-Reduktion**.

Die Definition von  $L_1 \leq_p L_2$  ist analog zu der von  $L_1 \leq L_2$ , mit dem Zusatz, dass  $f$  in deterministischer Polynomialzeit berechenbar sein muss.

## Definition

Seien  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  Sprachen.

Dann sagen wir  $L_1$  ist auf  $L_2$  **polynomiell reduzierbar** (geschrieben  $L_1 \leq_p L_2$ ), falls es eine **totale und in deterministischer Polynomialzeit berechenbare** Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  gibt, sodass für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ . Die Funktion  $f$  nennt man **Polynomialzeit-Reduktion**.

Die Definition von  $L_1 \leq_p L_2$  ist analog zu der von  $L_1 \leq L_2$ , mit dem Zusatz, dass  $f$  in deterministischer Polynomialzeit berechenbar sein muss.

Analogie:

$$\begin{aligned} L_1 \leq L_2 \text{ und } L_2 \text{ (semi-)entscheidbar} \\ \implies L_1 \text{ (semi-)entscheidbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 \leq_p L_2 \text{ und } L_2 \in (\mathcal{N})\mathcal{P} \\ \implies L_1 \in (\mathcal{N})\mathcal{P} \end{aligned}$$

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

---

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{P}$  und  $M_2$  eine DTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in deterministischer Polynomialzeit anhält.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{P}$  und  $M_2$  eine DTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in deterministischer Polynomialzeit anhält.

Sei  $M_f; M_2$  die Hintereinanderausführung von  $M_f$  und  $M_2$ . Dann gilt  $L(M_f; M_2) = L_1$ .



# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{P}$  und  $M_2$  eine DTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in deterministischer Polynomialzeit anhält.

Sei  $M_f; M_2$  die Hintereinanderausführung von  $M_f$  und  $M_2$ . Dann gilt  $L(M_f; M_2) = L_1$ .  
 $M_f; M_2$  hält stets in deterministischer Polynomialzeit.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{P}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ .

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{P}$  und  $M_2$  eine DTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in deterministischer Polynomialzeit anhält.

Sei  $M_f; M_2$  die Hintereinanderausführung von  $M_f$  und  $M_2$ . Dann gilt  $L(M_f; M_2) = L_1$ .

$M_f; M_2$  hält stets in deterministischer Polynomialzeit.

Daher gilt  $L_1 \in \mathcal{P}$ . □

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

Der Beweis ist analog:

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

Der Beweis ist analog:

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

Der Beweis ist analog:

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{NP}$  und  $M_2$  eine NTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in nichtdeterministischer Polynomialzeit anhält.

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

Der Beweis ist analog:

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{NP}$  und  $M_2$  eine NTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in nichtdeterministischer Polynomialzeit anhält.

Sei  $M_f; M_2$  die Hintereinanderausführung von  $M_f$  (deterministisch) und  $M_2$  (nichtdeterministisch). Dann gilt:  $L(M_f; M_2) = L_1$ .

# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

Der Beweis ist analog:

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{NP}$  und  $M_2$  eine NTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in nichtdeterministischer Polynomialzeit anhält.

Sei  $M_f; M_2$  die Hintereinanderausführung von  $M_f$  (deterministisch) und  $M_2$  (nichtdeterministisch). Dann gilt:  $L(M_f; M_2) = L_1$ .

$M_f; M_2$  hält stets in nichtdeterministischer Polynomialzeit.



# Nachweis der Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$

## Lemma

Falls  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$ , dann gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .

Der Beweis ist analog:

**Beweis** Seien  $L_1 \leq_p L_2$  und  $f$  in Polynomialzeit berechenbar.

Sei  $M_f$  die DTM, die  $f$  in Polynomialzeit berechnet.

Seien  $L_2 \in \mathcal{NP}$  und  $M_2$  eine NTM, sodass  $L(M_2) = L_2$ ,  
wobei  $M_2$  stets in nichtdeterministischer Polynomialzeit anhält.

Sei  $M_f; M_2$  die Hintereinanderausführung von  $M_f$  (deterministisch) und  $M_2$  (nichtdeterministisch). Dann gilt:  $L(M_f; M_2) = L_1$ .

$M_f; M_2$  hält stets in nichtdeterministischer Polynomialzeit.

Daher gilt  $L_1 \in \mathcal{NP}$ . □

# Transitivität der Polynomialzeit-Reduktion

## Lemma

Die Relation  $\leq_p$  ist transitiv, d.h. wenn  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \leq_p L_3$ , dann gilt auch  $L_1 \leq_p L_3$ .

# Transitivität der Polynomialzeit-Reduktion

## Lemma

Die Relation  $\leq_p$  ist transitiv, d.h. wenn  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \leq_p L_3$ , dann gilt auch  $L_1 \leq_p L_3$ .

**Beweis** Die Komposition von zwei Polynomen bleibt ein Polynom. □

## Definition

Eine Sprache  $L$  heißt  $\mathcal{NP}$ -vollständig, wenn gilt

1.  $L \in \mathcal{NP}$  und
2.  $L$  ist  $\mathcal{NP}$ -schwer: für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt  $L' \leq_p L$ .

## Definition

Eine Sprache  $L$  heißt  $\mathcal{NP}$ -vollständig, wenn gilt

1.  $L \in \mathcal{NP}$  und
2.  $L$  ist  $\mathcal{NP}$ -schwer: für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt  $L' \leq_p L$ .

$\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme sind die schwierigsten Probleme in  $\mathcal{NP}$ .

## Definition

Eine Sprache  $L$  heißt  $\mathcal{NP}$ -vollständig, wenn gilt

1.  $L \in \mathcal{NP}$  und
2.  $L$  ist  $\mathcal{NP}$ -schwer: für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt  $L' \leq_p L$ .

$\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme sind die schwierigsten Probleme in  $\mathcal{NP}$ .

$\mathcal{NP}$ -Schwere besagt, dass man mit dem  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Problem **alle anderen** Probleme aus  $\mathcal{NP}$  lösen kann.

## Definition

Eine Sprache  $L$  heißt  $\mathcal{NP}$ -vollständig, wenn gilt

1.  $L \in \mathcal{NP}$  und
2.  $L$  ist  $\mathcal{NP}$ -schwer: für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt  $L' \leq_p L$ .

$\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme sind die schwierigsten Probleme in  $\mathcal{NP}$ .

$\mathcal{NP}$ -Schwere besagt, dass man mit dem  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Problem **alle anderen** Probleme aus  $\mathcal{NP}$  lösen kann.

$\mathcal{NP}$ -schwer wird manchmal auch  $\mathcal{NP}$ -hart genannt.

# Nachweis der $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit

---

Nachweis der  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit einer Sprache  $L$ :

1. Zugehörigkeit zu  $\mathcal{NP}$ :

Gib eine Polynomialzeit-beschränkte NTM an, die  $L$  entscheidet.

(Alternativ: Gib eine Polynomialzeit-Reduktion von  $L \leq_p L_1$  an mit  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .)



# Nachweis der $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit

Nachweis der  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit einer Sprache  $L$ :

1. Zugehörigkeit zu  $\mathcal{NP}$ :

Gib eine Polynomialzeit-beschränkte NTM an, die  $L$  entscheidet.

(Alternativ: Gib eine Polynomialzeit-Reduktion von  $L \leq_p L_1$  an mit  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .)

2.  $\mathcal{NP}$ -Schwere:

Statt jedes mal neu zu beweisen, dass **alle** Probleme aus  $\mathcal{NP}$  auf  $L$  polynomiell reduzierbar sind, wähle ein  $\mathcal{NP}$ -schweres Problem  $L_0$  und zeige  $L_0 \leq_p L$ .

# Nachweis der $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit

Nachweis der  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit einer Sprache  $L$ :

## 1. Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$ :

Gib eine Polynomialzeit-beschränkte NTM an, die  $L$  entscheidet.

(Alternativ: Gib eine Polynomialzeit-Reduktion von  $L \leq_p L_1$  an mit  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .)

## 2. $\mathcal{NP}$ -Schwere:

Statt jedes mal neu zu beweisen, dass **alle** Probleme aus  $\mathcal{NP}$  auf  $L$  polynomiell reduzierbar sind, wähle ein  $\mathcal{NP}$ -schweres Problem  $L_0$  und zeige  $L_0 \leq_p L$ .

Da  $L_0$   $\mathcal{NP}$ -schwer, gilt  $L' \leq_p L_0$  für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  und damit  $L' \leq_p L_0 \leq_p L$  und mit Transitivität:  $L' \leq_p L$  für alle  $L' \in \mathcal{NP}$ .

# Nachweis der $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit

Nachweis der  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit einer Sprache  $L$ :

## 1. Zugehörigkeit zu $\mathcal{NP}$ :

Gib eine Polynomialzeit-beschränkte NTM an, die  $L$  entscheidet.

(Alternativ: Gib eine Polynomialzeit-Reduktion von  $L \leq_p L_1$  an mit  $L_1 \in \mathcal{NP}$ .)

## 2. $\mathcal{NP}$ -Schwere:

Statt jedes mal neu zu beweisen, dass **alle** Probleme aus  $\mathcal{NP}$  auf  $L$  polynomiell reduzierbar sind, wähle ein  $\mathcal{NP}$ -schweres Problem  $L_0$  und zeige  $L_0 \leq_p L$ .

Da  $L_0$   $\mathcal{NP}$ -schwer, gilt  $L' \leq_p L_0$  für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  und damit  $L' \leq_p L_0 \leq_p L$  und mit Transitivität:  $L' \leq_p L$  für alle  $L' \in \mathcal{NP}$ .

Daher ist  $L$   $\mathcal{NP}$ -schwer.

# Nachweis der $\mathcal{NP}$ -Schwere

---

Analog zum Vorgehen wie bei der Unentscheidbarkeit, wesentlicher Unterschied:  
Polynomialzeit-Reduktion:

$L_1 \leq L_2$  und  $L_1$  unentscheidbar  
 $\implies L_2$  unentscheidbar

$L_1 \leq_p L_2$  und  $L_1$   $\mathcal{NP}$ -schwer  
 $\implies L_2$   $\mathcal{NP}$ -schwer

## Bedingung für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

---

### Satz

Sei  $L$  ein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem. Dann gilt  $L \in \mathcal{P}$  g.d.w.  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

## Bedingung für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

---

### Satz

Sei  $L$  ein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem. Dann gilt  $L \in \mathcal{P}$  g.d.w.  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

### Beweis

← Offensichtlich.

## Bedingung für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

### Satz

Sei  $L$  ein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem. Dann gilt  $L \in \mathcal{P}$  g.d.w.  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

### Beweis

$\Leftarrow$  Offensichtlich.

$\Rightarrow$  Sei  $L$   $\mathcal{NP}$ -vollständig und  $L \in \mathcal{P}$ .

# Bedingung für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

## Satz

Sei  $L$  ein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem. Dann gilt  $L \in \mathcal{P}$  g.d.w.  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

## Beweis

$\Leftarrow$  Offensichtlich.

$\Rightarrow$  Sei  $L$   $\mathcal{NP}$ -vollständig und  $L \in \mathcal{P}$ .

Aus  $\mathcal{NP}$ -Schwere von  $L$  folgt:

Für alle  $L' \in \mathcal{NP}$ :  $L' \leq_p L$  und damit  $L' \in \mathcal{P}$ .



## Bedingung für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

### Satz

Sei  $L$  ein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem. Dann gilt  $L \in \mathcal{P}$  g.d.w.  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

### Beweis

$\Leftarrow$  Offensichtlich.

$\Rightarrow$  Sei  $L$   $\mathcal{NP}$ -vollständig und  $L \in \mathcal{P}$ .

Aus  $\mathcal{NP}$ -Schwere von  $L$  folgt:

Für alle  $L' \in \mathcal{NP}$ :  $L' \leq_p L$  und damit  $L' \in \mathcal{P}$ .

Da dies für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt, folgt  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ . □

## Bedingung für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

### Satz

Sei  $L$  ein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem. Dann gilt  $L \in \mathcal{P}$  g.d.w.  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

### Beweis

$\Leftarrow$  Offensichtlich.

$\Rightarrow$  Sei  $L$   $\mathcal{NP}$ -vollständig und  $L \in \mathcal{P}$ .

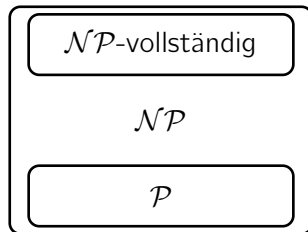
Aus  $\mathcal{NP}$ -Schwere von  $L$  folgt:

Für alle  $L' \in \mathcal{NP}$ :  $L' \leq_p L$  und damit  $L' \in \mathcal{P}$ .

Da dies für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt, folgt  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ . □

Also: Es reicht aus nachzuweisen, dass **ein**  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem in  $\mathcal{P}$  bzw. nicht in  $\mathcal{P}$  liegt, um die  $\mathcal{P}$ -vs.- $\mathcal{NP}$ -Frage ein für allemal beantworten zu können.

## Vermutete Lage der Probleme



Unter der Annahme  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  gibt es Probleme in  $\mathcal{NP}$ , die nicht in  $\mathcal{P}$  liegen und nicht  $\mathcal{NP}$ -vollständig sind (Ladner 1975).

Was fehlt noch? Ein erstes Problem  $L_0$ , dass man direkt als  $\mathcal{NP}$ -vollständig beweist. Ein solches  $L_0$  und den  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeitsbeweis sehen wir in der nächsten Vorlesung.

Was fehlt noch? Ein erstes Problem  $L_0$ , dass man direkt als  $\mathcal{NP}$ -vollständig beweist. Ein solches  $L_0$  und den  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeitsbeweis sehen wir in der nächsten Vorlesung.

Danach können wir  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von  $L$  zeigen durch

1.  $L \in \mathcal{NP}$
2.  $L_0 \leq_p L$ .

Was fehlt noch? Ein erstes Problem  $L_0$ , dass man direkt als  $\mathcal{NP}$ -vollständig beweist. Ein solches  $L_0$  und den  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeitsbeweis sehen wir in der nächsten Vorlesung.

Danach können wir  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von  $L$  zeigen durch

1.  $L \in \mathcal{NP}$
2.  $L_0 \leq_p L$ .

Danach lernen wir eine Auswahl an  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Problemen kennen.