

10b

Unentscheidbarkeit und das spezielle Halteproblem

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 2. Juli 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



Definition

Eine Sprache L ist **entscheidbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines Wortes w in endlicher Zeit feststellt, ob $w \in L$ gilt oder nicht.

Definition

Eine Sprache L ist **entscheidbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines Wortes w in endlicher Zeit feststellt, ob $w \in L$ gilt oder nicht.

Präziser:

Definition

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **entscheidbar**, wenn die **charakteristische Funktion** von L , $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Der χ_L -berechnende Algorithmus terminiert in jedem Fall und liefert ein Ergebnis.

Definition

Eine Sprache L ist **semi-entscheidbar**, falls $\chi'_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\chi'_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Der χ'_L -berechnende Algorithmus terminiert nur, falls $w \in L$,
und läuft anderenfalls endlos.

Zusammenhang zwischen Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Satz

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn L und \bar{L} jeweils semi-entscheidbar sind.

Zusammenhang zwischen Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Satz

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn L und \bar{L} jeweils semi-entscheidbar sind.

Beweis

\Rightarrow Konstruiere aus DTM, die χ_L berechnet, zwei DTMs, die χ'_L und $\chi'_{\bar{L}}$ berechnen.

Zusammenhang zwischen Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Satz

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn L und \bar{L} jeweils semi-entscheidbar sind.

Beweis

⇒ Konstruiere aus DTM, die χ_L berechnet, zwei DTMs, die χ'_L und $\chi'_{\bar{L}}$ berechnen.

⇐ Gegeben seien DTMs M_L und $M_{\bar{L}}$, die χ'_L und $\chi'_{\bar{L}}$ berechnen.

Grundgedanke: Lasse M_L und $M_{\bar{L}}$ parallel laufen.

Konstruiere eine DTM, die χ_L berechnet:

1. Starte mit $i = 1$.
2. Simuliere i Schritte von M_L .
3. Wenn diese akzeptiert (mit Ausgabe 1), dann akzeptiere mit Ausgabe 1.
4. Ansonsten simuliere i Schritte von $M_{\bar{L}}$.
5. Wenn diese akzeptiert (mit Ausgabe 1), dann akzeptiere mit Ausgabe 0.
6. Ansonsten erhöhe i um 1 und starte von neuem.



Entscheidbarkeit von Komplement

Korollar

Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch \overline{L} entscheidbar.

Entscheidbarkeit von Komplement

Korollar

Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch \overline{L} entscheidbar.

Beweis Da L entscheidbar ist, sind L und \overline{L} semi-entscheidbar.

Entscheidbarkeit von Komplement

Korollar

Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch \overline{L} entscheidbar.

Beweis Da L entscheidbar ist, sind L und \overline{L} semi-entscheidbar.
Daher sind $\overline{\overline{L}} = L$ und \overline{L} semi-entscheidbar.

Entscheidbarkeit von Komplement

Korollar

Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch \overline{L} entscheidbar.

Beweis Da L entscheidbar ist, sind L und \overline{L} semi-entscheidbar.

Daher sind $\overline{\overline{L}} = L$ und \overline{L} semi-entscheidbar.

Daher ist \overline{L} entscheidbar.



Definition

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv aufzählbar**, falls

- ▶ $L = \emptyset$ oder
- ▶ es eine **totale berechenbare** Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ gibt, sodass $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(i)$.
Man sagt dann „ f zählt L auf“.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beweis Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beweis Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere eine 2-Band-Turingmaschine M , die n in Binärzahldarstellung auf das Eingabeband erhält.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beweis Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere eine 2-Band-Turingmaschine M , die n in Binärzahldarstellung auf das Eingabeband erhält.

M erzeugt auf dem anderen Band das leere Wort.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beweis Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere eine 2-Band-Turingmaschine M , die n in Binärzahldarstellung auf das Eingabeband erhält.

M erzeugt auf dem anderen Band das leere Wort.

Anschließend zählt M die Zahl auf dem Eingabeband um 1 herunter und fügt bei jedem Herunterzählen ein a hinzu.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beweis Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere eine 2-Band-Turingmaschine M , die n in Binärzahldarstellung auf das Eingabeband erhält.

M erzeugt auf dem anderen Band das leere Wort.

Anschließend zählt M die Zahl auf dem Eingabeband um 1 herunter und fügt bei jedem Herunterzählen ein a hinzu.

Dies wird wiederholt bis auf dem Eingabeband 0 steht.

Beispiel für die rekursive Aufzählbarkeit

Lemma

Die Sprache Σ^* ist rekursiv aufzählbar.

Beweis Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere eine 2-Band-Turingmaschine M , die n in Binärzahldarstellung auf das Eingabeband erhält.

M erzeugt auf dem anderen Band das leere Wort.

Anschließend zählt M die Zahl auf dem Eingabeband um 1 herunter und fügt bei jedem Herunterzählen ein a hinzu.

Dies wird wiederholt bis auf dem Eingabeband 0 steht.

Dann steht auf dem anderen Band $f(n) = \underbrace{a \cdots a}_n$.



Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

Beweis

⇒ Sei f die totale berechenbare Funktion, die L aufzählt.

Dann berechnet der folgende Algorithmus $\chi'_L(w)$:

```
für  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  tue  
  wenn  $f(i) = w$  dann  
    stoppe und gib 1 aus  
  Ende  
Ende
```

Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

Beweis

⇒ Sei f die totale berechenbare Funktion, die L aufzählt.

Dann berechnet der folgende Algorithmus $\chi'_L(w)$:

```
für  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  tue  
  wenn  $f(i) = w$  dann  
    stoppe und gib 1 aus  
Ende  
Ende
```

⇐ Siehe Skript.

Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- ▶ L ist vom Typ 0.

Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- ▶ L ist vom Typ 0.
- ▶ L ist semi-entscheidbar.

Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- ▶ L ist vom Typ 0.
- ▶ L ist semi-entscheidbar.
- ▶ L ist rekursiv aufzählbar.

Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- ▶ L ist vom Typ 0.
- ▶ L ist semi-entscheidbar.
- ▶ L ist rekursiv aufzählbar.
- ▶ Es gibt eine Turingmaschine M , die L akzeptiert (d.h. $L(M) = L$).

Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- ▶ L ist vom Typ 0.
- ▶ L ist semi-entscheidbar.
- ▶ L ist rekursiv aufzählbar.
- ▶ Es gibt eine Turingmaschine M , die L akzeptiert (d.h. $L(M) = L$).
- ▶ χ'_L ist turing-, WHILE- bzw. GOTO-berechenbar.

Rekursiv aufzählbar \neq abzählbar

Eine Sprache L ist **abzählbar**, wenn es eine **totale** Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow L$ gibt, sodass $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(i) = L$.

Beachte: Abzählbarkeit fordert nicht, dass f **berechenbar** ist.

Gödelisierung von Turingmaschinen

Ziel: Stelle [Turingmaschinenbeschreibung](#) als natürliche Zahl in [Binärzahldarstellung](#) dar.

Andere Turingmaschinen können die Beschreibung als Eingabe erhalten, erzeugen usw.

Gödelisierung von Turingmaschinen

Sei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine DTM mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und

- ▶ $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$, wobei $a_0 = \square$, $a_1 = \#$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$
- ▶ $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$
- ▶ $E = \{z_n\}$

Gödelisierung von Turingmaschinen

Sei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine DTM mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und

- ▶ $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$, wobei $a_0 = \square$, $a_1 = \#$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$
- ▶ $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$
- ▶ $E = \{z_n\}$

Für $\delta(z_p, a_i) = (z_q, a_j, D)$ erzeuge Wort über Alphabet $\{0, 1, \#\}$:

$$\#\#bin(p)\#bin(i)\#bin(q)\#bin(j)\#bin(D_m)$$

mit $D_m = 0$, falls $D = L$, $D_m = 1$, falls $D = R$, $D_m = 2$, falls $D = N$

Gödelisierung von Turingmaschinen

Sei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine DTM mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und

- ▶ $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$, wobei $a_0 = \square$, $a_1 = \#$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$
- ▶ $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$
- ▶ $E = \{z_n\}$

Für $\delta(z_p, a_i) = (z_q, a_j, D)$ erzeuge Wort über Alphabet $\{0, 1, \#\}$:

$$\#\#bin(p)\#bin(i)\#bin(q)\#bin(j)\#bin(D_m)$$

mit $D_m = 0$, falls $D = L$, $D_m = 1$, falls $D = R$, $D_m = 2$, falls $D = N$

Für δ schreibe alle δ -Wörter hintereinander.

Gödelisierung von Turingmaschinen

Sei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine DTM mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und

- ▶ $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$, wobei $a_0 = \square$, $a_1 = \#$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$
- ▶ $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$
- ▶ $E = \{z_n\}$

Für $\delta(z_p, a_i) = (z_q, a_j, D)$ erzeuge Wort über Alphabet $\{0, 1, \#\}$:

$$\#\#bin(p)\#bin(i)\#bin(q)\#bin(j)\#bin(D_m)$$

mit $D_m = 0$, falls $D = L$, $D_m = 1$, falls $D = R$, $D_m = 2$, falls $D = N$

Für δ schreibe alle δ -Wörter hintereinander.

Schließlich: Kodiere Alphabet $\{0, 1, \#\}$ durch $\{0 \mapsto 00, 1 \mapsto 01, \# \mapsto 11\}$.

Wende dies auf die Kodierung von δ an.

Gödelisierung von Turingmaschinen

Sei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine DTM mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und

- ▶ $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$, wobei $a_0 = \square$, $a_1 = \#$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$
- ▶ $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$
- ▶ $E = \{z_n\}$

Für $\delta(z_p, a_i) = (z_q, a_j, D)$ erzeuge Wort über Alphabet $\{0, 1, \#\}$:

$$\#\#bin(p)\#bin(i)\#bin(q)\#bin(j)\#bin(D_m)$$

mit $D_m = 0$, falls $D = L$, $D_m = 1$, falls $D = R$, $D_m = 2$, falls $D = N$

Für δ schreibe alle δ -Wörter hintereinander.

Schließlich: Kodiere Alphabet $\{0, 1, \#\}$ durch $\{0 \mapsto 00, 1 \mapsto 01, \# \mapsto 11\}$.

Wende dies auf die Kodierung von δ an.

Wir bezeichnen mit w_M die so kodierte DTM M .

Gödelisierung von Turingmaschinen

- ▶ Nicht jedes Wort über $\{0, 1\}$ entspricht der Kodierung einer DTM.
- ▶ Sei \hat{M} eine beliebige aber feste DTM.
- ▶ Definiere für jedes $w \in \{0, 1\}^*$ die zugehörige DTM M_w :

$$M_w := \begin{cases} M & \text{falls } w = w_M \\ \hat{M} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ hält für Eingabe } w\}$$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Satz

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (und damit **unentscheidbar**).

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Satz

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (und damit **unentscheidbar**).

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass K entscheidbar ist.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Satz

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (und damit **unentscheidbar**).

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass K entscheidbar ist.

Dann ist χ_K berechenbar, und es gibt eine DTM M , die χ_K berechnet.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Satz

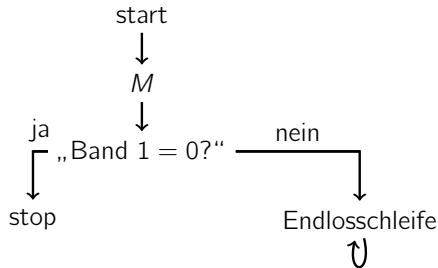
Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (und damit **unentscheidbar**).

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass K entscheidbar ist.

Dann ist χ_K berechenbar, und es gibt eine DTM M , die χ_K berechnet.

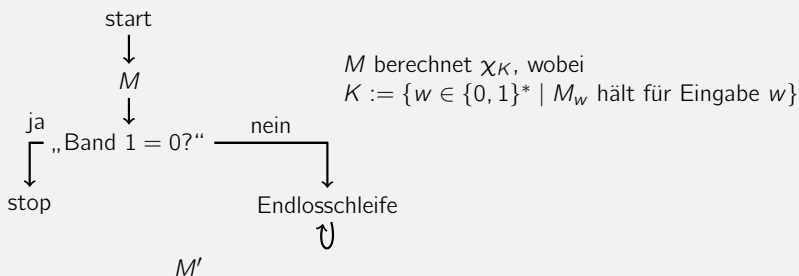
Konstruiere M' wie folgt:

1. M' lässt M ablaufen.
2. Wenn M mit 0 auf dem Band endet, dann akzeptiert M' .
3. Wenn M mit 1 auf dem Band endet, dann läuft M' in eine Endlosschleife.



Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

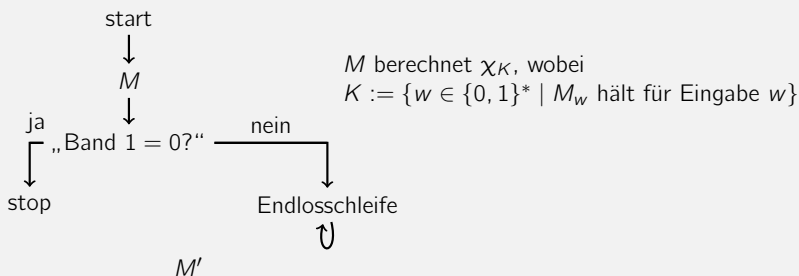
Zur Erinnerung:



Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Zur Erinnerung:

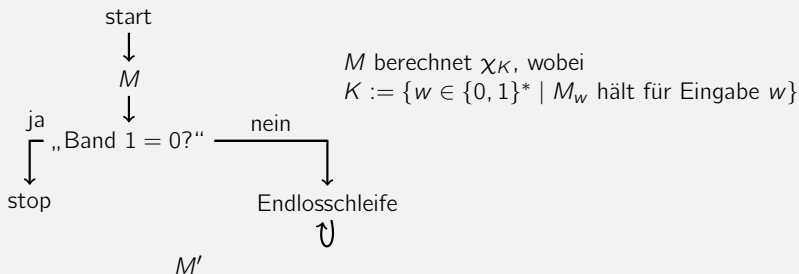


Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Zur Erinnerung:

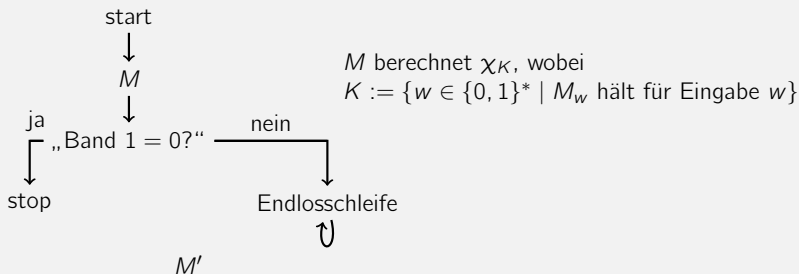


Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$
g.d.w. M angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Zur Erinnerung:



Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

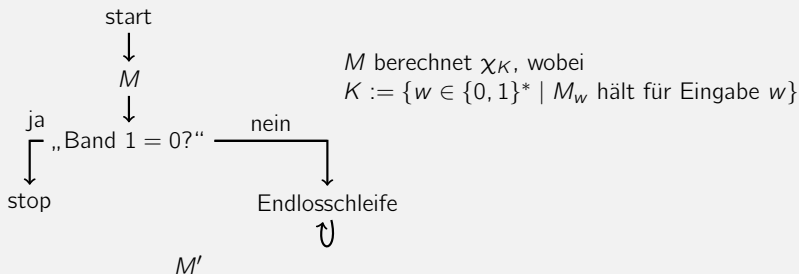
M' hält für Eingabe $w_{M'}$

g.d.w. M angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus

g.d.w. $\chi_K(w_{M'}) = 0$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Zur Erinnerung:



Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$

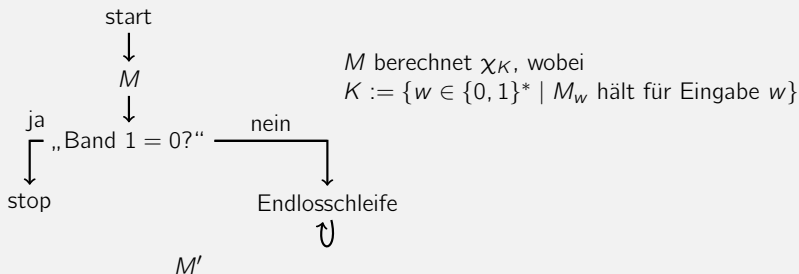
g.d.w. M angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus

g.d.w. $\chi_K(w_{M'}) = 0$

g.d.w. $w_{M'} \notin K$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Zur Erinnerung:



Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$

g.d.w. M angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus

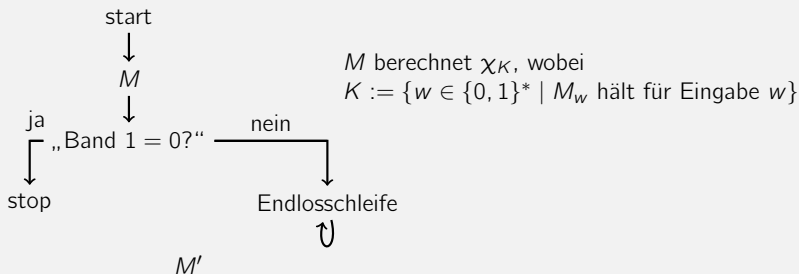
g.d.w. $\chi_K(w_{M'}) = 0$

g.d.w. $w_{M'} \notin K$

g.d.w. M' hält nicht für Eingabe $w_{M'}$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Zur Erinnerung:



Beweis (Fortsetzung) Betrachte nun M' auf der Eingabe $w_{M'}$:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$

g.d.w. M angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus

g.d.w. $\chi_K(w_{M'}) = 0$

g.d.w. $w_{M'} \notin K$

g.d.w. M' hält nicht für Eingabe $w_{M'}$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweis (Fortsetzung) Es gilt also:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$ g.d.w. M' hält nicht für Eingabe $w_{M'}$.

Widerspruch. K ist daher nicht entscheidbar, sondern unentscheidbar. □

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweis (Fortsetzung) Es gilt also:

M' hält für Eingabe $w_{M'}$ g.d.w. M' hält nicht für Eingabe $w_{M'}$.

Widerspruch. K ist daher nicht entscheidbar, sondern unentscheidbar. □

Der Beweis, dass K unentscheidbar ist, verwendet ein [Diagonalisierungsargument](#), das wir gleich genauer erläutern.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	...
M_{w_1}	ja	nein	ja	...
M_{w_2}	nein	nein	ja	...
M_{w_3}	ja	nein	ja	...
...

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	...
M_{w_1}	ja	nein	ja	...
M_{w_2}	nein	nein	ja	...
M_{w_3}	ja	nein	ja	...
...
M_{w_D}				

Eintrag in Zeile i und Spalte j : ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, nein sonst.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	...
M_{w_1}	ja	nein	ja	...
M_{w_2}	nein	nein	ja	...
M_{w_3}	ja	nein	ja	...
...
M_{w_D}	nein			

Eintrag in Zeile i und Spalte j : ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, nein sonst.

Sei $D = \overline{K} = \{w_i \mid M_{w_i} \text{ hält nicht für Eingabe } w_i\}$.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	...
M_{w_1}	ja	nein	ja	...
M_{w_2}	nein	nein	ja	...
M_{w_3}	ja	nein	ja	...
...
M_{w_D}	nein	ja		

Eintrag in Zeile i und Spalte j : ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, nein sonst.

Sei $D = \overline{K} = \{w_i \mid M_{w_i} \text{ hält nicht für Eingabe } w_i\}$.

Wir nehmen an, dass w_D die Beschreibung von DTM M_{w_D} ist, die χ_D berechnet.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	...
M_{w_1}	ja	nein	ja	...
M_{w_2}	nein	nein	ja	...
M_{w_3}	ja	nein	ja	...
...
M_{w_D}	nein	ja	nein	

Eintrag in Zeile i und Spalte j : ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, nein sonst.

Sei $D = \overline{K} = \{w_i \mid M_{w_i} \text{ hält nicht für Eingabe } w_i\}$.

Wir nehmen an, dass w_D die Beschreibung von DTM M_{w_D} ist, die χ_D berechnet.

Der Eintrag in Zeile M_{w_D} und Spalte w_D ist ja g.d.w. der Eintrag nein ist.

Widerspruch. $D = \overline{K}$ und K sind daher nicht entscheidbar. □

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	\dots	w_D
M_{w_1}	ja	nein	ja	\dots	\dots
M_{w_2}	nein	nein	ja	\dots	\dots
M_{w_3}	ja	nein	ja	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
M_{w_D}	nein	ja	nein	\dots	

Eintrag in Zeile i und Spalte j : ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, nein sonst.

Sei $D = \overline{K} = \{w_i \mid M_{w_i} \text{ hält nicht für Eingabe } w_i\}$.

Wir nehmen an, dass w_D die Beschreibung von DTM M_{w_D} ist, die χ_D berechnet.

Der Eintrag in Zeile M_{w_D} und Spalte w_D ist ja g.d.w. der Eintrag nein ist.

Widerspruch. $D = \overline{K}$ und K sind daher nicht entscheidbar. □

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Alternativer Beweis

	w_1	w_2	w_3	\dots	w_D
M_{w_1}	ja	nein	ja	\dots	\dots
M_{w_2}	nein	nein	ja	\dots	\dots
M_{w_3}	ja	nein	ja	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
M_{w_D}	nein	ja	nein	\dots	??

Eintrag in Zeile i und Spalte j : ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, nein sonst.

Sei $D = \overline{K} = \{w_i \mid M_{w_i} \text{ hält nicht für Eingabe } w_i\}$.

Wir nehmen an, dass w_D die Beschreibung von DTM M_{w_D} ist, die χ_D berechnet.

Der Eintrag in Zeile M_{w_D} und Spalte w_D ist ja g.d.w. der Eintrag nein ist.

Widerspruch. $D = \overline{K}$ und K sind daher nicht entscheidbar.

