Die Manin-Vermutung für eine del-Pezzo-Fläche

Sabine Bauer

DMV Studierendenkonferenz, 23.September 2013

Fragestellung

Gegeben:

- in der Sprache der Algebra: fünf Polynomgleichungen in sechs Variablen

  $\updownarrow$

- Formulierung in der algebraischen Geometrie: eine Varietät S im projektiven Raum

Gesucht:

- algebraisch: Lösungen bzw. Nullstellen in $\mathbb{Q}$

  $\updownarrow$

- geometrisch: rationale Punkte auf S

Bemerkung

- Es sind unendlich viele rationale Punkte möglich
- Einführen eines Betrags, um diese zu vergleichen
- Punkte, die nicht auf Geraden liegen, sind interessanter: genau die Punkte, die keine Koordinate gleich 0 haben.
- **Manin – Vermutung** macht präzise Aussage über die **Anzahl rationaler Punkte** vom Betrag höchstens B

Die Manin-Vermutung in meinem Fall

Betrachte $S \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{Q}}$, definiert durch die Polynomgleichungen:

$$\begin{aligned} x_0x_4 + x_1^2 + x_1x_2 &= \\ x_0x_5 - x_1x_3 &= \\ x_1x_5 + x_2x_5 + x_3x_4 &= \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 &= \\ x_1x_4 - x_2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

MANIN:

$$N(B) \sim cB\log(B)^4, \text{ für } B \to \infty$$

Ziel meiner Masterarbeit: diese Formel beweisen

Beweisvorgehen

- Finde eine Bijektion: rationale Punkte auf $S \leftrightarrow$ ganzzahlige Punkte auf affiner Varietät T (universeller Torsor) mit Nebenbedingungen
- Zähle die Punkte auf T mit zahlentheoretischen Mitteln

Wie findet man die Bijektion?

- Rationale Punkte auf S haben teilerfremde ganzzahlige Koordinaten
- Zerlege diese in Produkte aus neuen Variablen, von denen einige teilerfremd sind
- Höhenbedingungen $\leftrightarrow$ größte Koordinate hat Betrag höchstens B

Was bringt das?

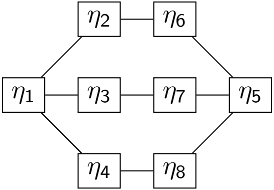
- T hat höhere Dimension als S
- Aber: T ist einfacher zu handhaben: affin, nur eine Gleichung
- Nun: Summation über die acht Variablen unter Beachtung der Nebenbedingungen

Die Bijektion

Prof. Derenthal: 8 Variablen η_i mit $\eta_2\eta_6 + \eta_4\eta_8 + \eta_3\eta_7 = 0$
Höhenbedingungen:

$$\begin{aligned}
|\eta_5^2\eta_6\eta_7\eta_8| &\leq B,\\
|\eta_1\eta_2\eta_3\eta_5\eta_6\eta_7| &\leq B,\\
|\eta_1\eta_2^2\eta_5\eta_6^2| &\leq B,\\
|\eta_1\eta_3\eta_4\eta_5\eta_7\eta_8| &\leq B,\\
|\eta_1^2\eta_2^2\eta_3\eta_4\eta_6| &\leq B,\\
|\eta_1^2\eta_2\eta_3^2\eta_4\eta_7| &\leq B.
\end{aligned}$$

Kodierung der Teilerfremdheitsbedingungen:
$ggT(\eta_i, \eta_j) = 1 \Leftrightarrow$ keine Kante zwischen ihnen



Die Bijektion II

- Frage: Wie kommt man von den x_i zu den η_j?
- Beobachtung: η_1 kommt in allen x_i außer x_0 vor.
- Versuche $\eta_1 = ggT(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.
- Kosistenz prüfen: weil $\overline{x}$ ein primitiver Vektor ist, kommt es in x_0 nicht vor, und ist teilerfremd zu allen Faktoren von x_0. Erste Polynomgleichung $\Rightarrow \eta_1$ kommt doppelt in x_4 vor etc.
- Ähnlich: $\eta_2 = \mathrm{ggT}\left(\frac{x_1}{\eta_1}, \frac{x_2}{\eta_1}, \frac{x_4}{\eta_1^2}, \frac{x_5}{\eta_1^2}\right)$ Wieder Konsistenz nachprüfen!
- Für andere Variablen auch passende Definitionen finden und alle Eigenschaften nachrechnen $\rightarrow$ nach $\sim$ 10 Seiten nachgerechnet.

Bemerkung: durch Kombination der Torsorgleichung mit zwei Höhenbedingungen erhält man außerdem je eine neue, symmetrische Höhenbedingung:

$$\alpha = |\eta_1\eta_2\eta_3\eta_5\eta_6\eta_7| \leq B, \beta = |\eta_1\eta_3\eta_4\eta_5\eta_7\eta_8| \leq B$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = |\eta_1\eta_3\eta_5\eta_7 \underbrace{(\eta_2\eta_6 + \eta_4\eta_8)}_{=-\eta_3\eta_7 (TG)}| = |\eta_1\eta_3^2\eta_5\eta_7^2| \leq 2B.$$

Die Summation

- Fallunterscheidung: $|\eta_6| \le |\eta_2|$ bzw.$|\eta_6| > |\eta_2|$
- Beide Fälle sind ähnlich/ fast symmetrisch (ggT-Bedingungen symmetrisch, Höhenbedingungen nicht ganz)

Lemma (Möbius-Inversion)

Sei $S' \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine endliche Menge. Dann gilt

$$\#\{\underline{x} \in S' : \mathrm{ggT}(x_1, ..., x_n) = 1\} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\#\{\underline{x} \in S' : k \textit{ teilt } x_i \textit{ für alle } 1 \le i \le n\}.$$

Lemma

Sei $a, b \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$ so, dass $b \ge a$ und $q > 0$. Dann haben wir

$$\#\{n \in \mathbb{Z} \cap (a, b] : n \equiv n_0 \mod q\} = \frac{b-a}{q} + \mathcal{O}(1).$$

Wende dies auf die zu berechnende Summe an! Halte dazu $\eta' = (\eta_1, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_8)$ fest.

Die Summation II

Die Summe sieht so aus:

$$\begin{aligned} N(B) =& \#\{\underline{x} \in S(\mathbb{Q}), H(\underline{x}) \leq B, \underline{x} \notin G(S)\} \\ =& \#\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6,\eta_7,\eta_8) \in \mathbb{Z}^8_{\neq 0} : \\ & \eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5 \geq 1, \text{ Nebenbedingungen, Torsorgleichung gelten}\} \\ =& 2N_1(A,B) + 2N_2(A,B) + \mathcal{O}(B\log(B)^3\log(\log(B))), \end{aligned}$$

wobei einige Nebenbedingungen durch erlaubte Einschränkungen dazukommen, η' fest

$$\begin{aligned} & N_1(\eta', B) = \\ & \# \left\{ (\eta_2,\eta_3,\eta_7) \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \times \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{\neq 0} : \begin{array}{c} (TG),(NB) \\ 0 < \eta_6 \leq \eta_2 \\ \eta_3, |\eta_7| \geq \log(B)^A, \\ \mathrm{ggT}(\eta_2, \eta_3\eta_4\eta_5\eta_7\eta_8) = \\ \mathrm{ggT}(\eta_3, \eta_4\eta_5\eta_6\eta_8) = \\ \mathrm{ggT}(\eta_7, \eta_1\eta_4\eta_6\eta_8) = 1 \end{array} \right\} \\ & = \sum_{k_2 | \eta_5} \mu(k_2) S_{k_2}, \end{aligned}$$

Die Summation III

$$S_{k_2} = \#\left\{ (\eta_2', \eta_3, \eta_7) \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \times \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{\neq 0} : \begin{array}{c} \eta_2' k_2 \eta_6 + \eta_3\eta_7 = -\eta_4\eta_8 \\ 0 < \eta_6 \leq \eta_2, \\ \eta_3, |\eta_7| \geq \log(B)^A, \\ (NB') \\ \mathrm{ggT}(\eta_3, \eta_4\eta_5\eta_6\eta_8) = \\ \mathrm{ggT}(\eta_7, \eta_1\eta_4\eta_6\eta_8) = 1 \end{array} \right\}$$

Dies wird für die verbleibenden Teilerfremdheitsbedingungen wiederholt.

Kongruenz

Kongruenz-Trick, der es uns ermöglicht, automatisch über eine später durch Möbiusinversionen hinzukommende Variable η_2' zu summieren, so dass diese nicht mehr explizit auftaucht:

$$\#\{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 | a + b = cd\} = \#\{(a, b) | a \equiv -b \mod d\},$$

denn für jedes Paar (a, b) ist das zugehörige c eindeutig festgelegt.

Summation über die verbleibenden Variablen

- Nun haben wir eine Summe mit Kongruenz $\rightarrow$ Anwenden von zahlentheoretischen Funktionen (hier leider keine Zeit dazu)
- Umwandeln der Summe in ein Integral mit Fehlerterm: Kodierung der Höhenbedingungen

Die Kodierung mit neuen Variablen

$$Y_7 = \frac{B}{\eta_5^2 \eta_6 \eta_8}, \; Y_3 = \frac{\eta_5^{3/2} \eta_6 \eta_8}{\eta_1^{1/2} B^{1/2}}, \; Y_4 = \frac{B^{1/2}}{\eta_8 \eta_1^{1/2} \eta_5^{1/2}},$$
$$Y_7'' = \frac{Y_7}{l_7 k_7}, \; Y_3'' = \frac{Y_3}{l_3 k_3}.$$

Definiere eine Funktion h durch

$$h(t_3, t_7, t_4) = \max\{|t_7|, |t_7 t_3||t_3 t_7 + t_4|, (t_3 t_7 + t_4)^2, |t_7 t_3 t_4|, |t_3 t_4|(t_3 t_7 + t_4)^2,$$
$$t_3^2 |t_7||t_4||t_3 t_7 + t_4|, \frac{t_7^2 t_3^2}{2}, \frac{|t_4||t_3 t_7 + t_4|}{2}, \frac{t_4^2}{3}, \frac{|t_3| t_4^2 |t_3 t_7 + t_4|}{2}\}.$$

Umwandlung in ein Integral

Die Kodierung II

Dann gelten die Höhenbedingung gdw.

$$h\left(\frac{\eta_3''}{Y_3''}, \frac{\eta_7''}{Y_7''}, \frac{\eta_4}{Y_4}\right) \leq 1$$

Definiere reellwertige Funktionen, in denen h vorkommt:

$$g_1 : (t_7, t_4, t, \eta, B) \mapsto \int_{h(t_3,t_7,t_4)\leq 1, t\leq |t_3 t_7 + t_4|, |t_3| Y_3 \geq \log(B)^A} dt_3$$

$$g_2 : (t_4, t, \eta, B) \mapsto \int_{|t_7| Y_7 \geq \log(B)^A} g_1(t_7, t_4, t, \eta, B) dt_5$$

$$g_3 : (t, \eta, B) \mapsto \int_{|t_4| Y_4 \geq 1} g_2(t_4, t, \eta, B) dt_4$$

$$g_4 : t \mapsto \int_{t_4 > 0, h(t_3,t_7,t_4)\leq 1, t \leq |t_3 t_7 + t_4|} dt_3 dt_7 dt_4.$$

- Die Integrale enthalten die Höhenbedingungen
- Ziel: Die Summe abhängig von g_4 darstellen.
- schrittweises Vorgehen:
  - Jeweils eine Vereinfachung mit Fehlerterm
  - Zeigen, dass der Fehlerterm bzgl. der Abschätzung vernachlässigbar ist.

Man erhält das

Lemma

$$2N_1(\eta, B) = \mathcal{P} g_4(\kappa) \frac{B}{\eta_1 \eta_5 \eta_6 \eta_8} \Theta(\eta) + R_2(\eta, B),$$

mit dem Restterm klein genug, um ihn zu ignorieren.

Dabei:$\eta = (\eta_1, \eta_5, \eta_6, \eta_8)$.
Summation über diese und Umrechnung in Integrale liefert dreimal $\log(B)$

Endergebnis

Was am Schluss gezeigt wurde, ist

Theorem

$$N(B) = \omega_\infty \alpha \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^5 \omega_p B \log(B)^4 + \mathcal{O}(B \log(B)^3 \log(\log(B))).$$

Dabei läuft das Produkt über alle Primzahlen und es ist

$$\omega_p = 1 + \frac{5}{p} + \frac{1}{p^2},$$

$$\omega_\infty = -\frac{1}{2} \int\int\int_{\{|\frac{x_1^2+x_1x_2}{x_4}|,|x_1|,|x_2|,|\frac{x_1^2+x_1x_2}{x_2}|,|x_4|,|\frac{x_1x_4}{x_2}|\leq 1\}} \frac{1}{x_2x_4} dx_1 dx_2 dx_4$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{vol}\{(x_1, x_5, x_6, x_8) \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} : 1 - x_5 - 2x_6 - x_1 \geq 0, 2x_8 + x_5 + x_1 \leq 1,$$
$$3x_5 + 2x_6 + 2x_8 - x_1 \geq 1, 2x_5 + x_6 + x_8 \leq 1\}.$$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!