Synchronisation Teil II: Stärkere Primitiven

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 7. November 2019

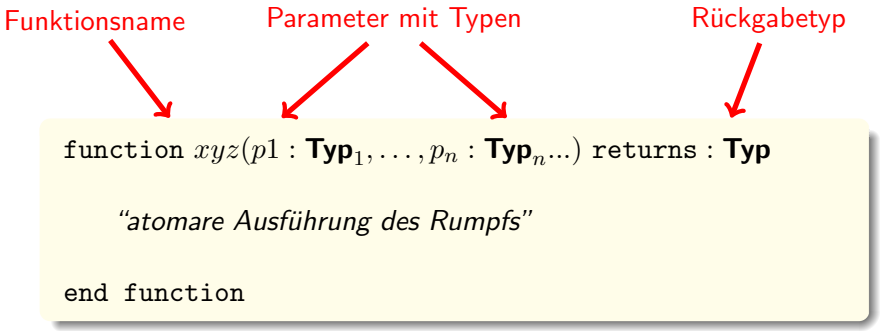
Übersicht

Bisher

- Nur Lesen und Schreiben sind atomare (unteilbare) Operationen
- atomare Leseoperation: `if` $x = 10$ `then` ...
- atomare Schreiboperation: $x := 10$

Jetzt

- Hardware unterstützt verschiedene stärkere Speicheroperationen
- Formal stellen wir diese Operationen als Funktionen dar



Typen

- **Register** = gemeinsames Speicherregister
- **Lokales Register** = lokales Speicherregister
- **Wert** = ein Wert wie True, 1, (keine weitere Unterscheidung)
- **Funktion** = eine Seiteneffekt-freie Funktion auf Werten

Read und Write in der Funktionsnotation

read(r)

```
function read(r : Register) returns : Wert
    return(r) :
end function
```

write(r, v)

```
function write(r : Register, v : Wert)
    r := v
end function
```

kein returns, da kein Rückgabewert!

Nebenäufige Objekte

"Nebenläufiges Objekt":
Nebenläufige Datenstruktur mit atomaren Operationen

Beispiel:

Atomares Speicherregister (als Objekt)

Gemeinsames Speicherregister mit

- atomarer *read*-Operation
- atomarer *write*-Operation

Test-and-set

test-and-set(r, v)

Wert v wird dem Register r zugewiesen, Rückgabewert: alter Wert von r.

```
function test-and-set(r : Register, v : Wert) returns : Wert
    temp := r;
    r := v;
    return(temp);
end function
```

Variante: Register, darf nur 0 oder 1 sein.

```
function test-and-set(r : Register) returns : Wert
    temp := r;
    r := 1;
    return(temp) :
end function
```

Test-and-Set-Objekt

Test-and-set-Objekt

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *write*-Operation
- *test-and-set*-Operationen

Test-and-set-Bit

Ein gemeinsames Speicherregister mit Werten 0 und 1

- alternative *test-and-set*-Operationen setzt Register auf 1
- *reset*-Operation: atomares Schreiben einer 0 in das Register,

Test-and-test-and-set-Objekt

Ein Test-and-set Objekt, dass zusätzlich die atomare *read*-Operation unterstützt

Swap

swap

Wert von lokalem Register mit gemeinsamen Register tauschen:

```
function swap(r : Register, l : Lokales Register)
    temp := r;
    r := l;
    l := temp;
end function
```

wird manchmal auch als *fetch-and-store* bezeichnet.

Swap-Objekt

Swap-Objekt

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *swap*-Operation zwischen dem Register und jedem beliebigen lokalen Register unterstützt.

Fetch-and-add

fetch-and-add

Erhöhen des Registerwerts um v, Rückgabe: alter Wert

```
function fetch-and-add(r : Register, v : Wert) returns : Wert
    temp := r;
    r := temp + v;
    return(temp);
end function
```

Variante: *fetch-and-increment*: genau 1 wird dazu addiert

Fetch-and-add Objekt

Fetch-and-increment-Objekt

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *fetch-and-increment*-Operation
- *write*-Operation
- *read*-Operation

Fetch-and-add-Objekt

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *fetch-and-add*-Operation
- *write*-Operation
- *read*-Operation

Read-Modify-Write

read-modify-write

Anwenden einer Funktion auf Registerwert. Rückgabe: alter Wert.

```
function read-modify-write(r : Register, f : Funktion)
  returns : Wert
    temp := r;
    r := f(temp);
    return(temp);
end function
```

Beachte:

- *read*, *write*, *test-and-set* und *fetch-and-add* können alle mittels *read-modify-write* ausgedrückt werden
- Funktion f muss Seiteneffekt-frei sein.
  Bsp.: f eine atomare Operation wie *fetch-and-increment*
  $\Longrightarrow$ unklar was atomar ausgeführt wird? Deswegen: Verboten!

RMW-Objekt

Read-Modify-Write-Objekt

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *read-modify-write*-Operation
- *write*-Operation
- *read*-Operation

Compare-and-swap

compare-and-swap

erwartet (r,old,new): Wenn r=old, dann neuer Wert für r und Rückgabe True, sonst Rückgabe False

```
function compare-and-swap(r : Register, old : Wert, new : Wert)
 returns : Wert
   if r = old then
       r := new;
       return(True);
   else
       return(False);
end function
```

Compare-and-swap-Objekt

Compare-and-swap-Objekt

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *compare-and-swap*-Operation
- *write*-Operation
- *read*-Operation

Sticky-Write

sticky-write

- *sticky-write*(r, v) erwartet ein Register und einen Wert.
- Initialwert von r: undefiniert (geschrieben als $\perp$).
- Wenn der Wert des Registers r gleich zu v oder $\perp$, dann Wert wird auf v gesetzt, True als Ergebnis geliefert.
- sonst: False als Ergebnis

Variante

sticky-bit-write-Operation
Spezialfall: r kann nur die Wert 0, 1 und $\perp$ annehmen

Sticky-Bit (Objekt)

Sticky-Bit

Ein gemeinsames Speicherregister mit

- *read*-Operation
- *sticky-bit-write*-Operation

Move

move

Wert eines gemeinsamen Registers wird in weiteres gemeinsames Register „verschoben“

```
function move(r1 : Register, r2 : Register)
    temp := r2;
    r1 := temp;
end function
```

Move-Objekt

Move-Objekt

Gruppe von gemeinsamen Speicherregister, so dass

- paarweise die *move*-Operation unterstützt wird
- *write*-Operation für alle Register
- *read*-Operation für all Register

Shared swap

shared swap

Zwei gemeinsame Register tauschen den Wert

```
function shared-swap(r1 : Register, r2 : Register)
    temp1 := r1;
    temp2 := r2;
    r1 := temp2;
    r2 := temp1;
end function
```


Shared-swap-Objekt

Shared-swap-Objekt

Gruppe von gemeinsamen Speicherregistern, mit

- paarweise: die *shared-swap*-Operation
- *write*-Operation
- *read*-Operation

Mutual-Exclusion Algorithmen mit test-and-set-Bits

Test-and-set-Bits

Test-and-set-Bit = Lock (Sperre)

Ein gemeinsames Speicherregister mit Werten 0 und 1

- *test-and-set*-Operationen setzt Register auf 1
  Operation wird auch *lock* genannt
- *reset*-Operation: atomares Schreiben einer 0
  Operation wird auch *unlock* genannt

Spin-Lock

Algorithmen benutzen Locks oft so:

```
while test-and-set(lock)=1 do skip;
```

D.h. der Algorithmus "kreiselt" um den Lock.

Daher der Name Spin-Lock

Einfacher Algorithmus mit Test-and-Set-Bit

Initial: Test-and-set-Bit x hat Wert 0

Programm des i. Prozesses

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  await (test-and-set(x)=0);
(3)  Kritischer Abschnitt
(4)  reset(x);
end loop
```


Beispiel: 4 Prozesse

Prozess 1

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  await (test-and-set(x)=0);
(3)  Kritischer Abschnitt
(4)  reset(x);
end loop
```

Prozess 2

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  await (test-and-set(x)=0);
(3)  Kritischer Abschnitt
(4)  reset(x);
end loop
```

x := 01
return von t-a-s:
0return von t-a-s: 1

Prozess 3

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  await (test-and-set(x)=0);
(3)  Kritischer Abschnitt
(4)  reset(x);
end loop
```

Prozess 4

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  await (test-and-set(x)=0);
(3)  Kritischer Abschnitt
(4)  reset(x);
end loop
```


Eigenschaften des einfachen Algorithmus

- Garantiert wechselseitigen Ausschluss:
  - Nur ein Prozess kann atomar x von 0 auf 1 setzen und dabei 0 als Ergebnis erhalten
  - Solange x=1 gilt, erhalten alle andern Prozesse das Ergebnis 1
  - Erst nach atomarem *reset* kann der nächste Prozess den Lock setzen
- ist Deadlock-frei
  - Wenn mehrere Prozesse im Initialisierungscode keiner im kritischen Abschnitt
  - Dann muss x=0 nach endlich vielen Schritten gelten
  - Danach: Einer muss nach endlichen vielen Schritten den Lock setzen
- ist nicht Starvation-frei

Eigenschaften des einfachen Algorithmus (2)

- Aus praktischer Sicht schlecht:
  Bei vielen Prozessen: Lock wird ständig (von 1 auf 1) gesetzt
- Durch das ständige Schreiben müssen Prozessor-Caches auch ständig aktualisiert werden!
- Das führt zu (unnötigem) Kommunikationsaufwand!

Verbesserung mit Test-and-Test-and-Set-Bit

Initial: Test-and-test-and-set-Bit x hat Wert 0

Programm des i. Prozesses

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  await (x=0);
(3)  while (test-and-set(x)=1) do
(4)     await (x=0);
(5)  Kritischer Abschnitt
(4)  reset(x);
end loop
```

- Er wird lesend gewartet
- Nur wenn Chance zum Setzen des Locks vorhanden: test-and-set

(Praktische) Verbesserung mit Pause-Operation

Initial: Test-and-test-and-set-Bit x hat Wert 0, delay: lokale Variable, minDelay, maxDelay: Konstanten

Programm des i. Prozesses

```
loop forever
(1)  restlicher Code
(2)  delay=minDelay;
(3)  repeat
(4)     delay := min(2*delay,maxDelay)
(5)     while (x=1) do pause(delay);
(6)  until (test-and-set(x)=0)
(7)  Kritischer Abschnitt
(8)  reset(x);
end loop
```

- pause(x) wartet x ms
- Wartezeit wird exponentiell erhöht ("exponential backoff")
- Nur erhöhen, wenn Lock frei war, aber nicht geschnappt wurde

Starvation-freier Algorithmus mit Test-and-Set

- Veröffentlicht: R. Alur und G.Taubenfeld 1993
- Starvation-frei
- erfüllt die Eigenschaft n-Fairness (n = Anzahl der Prozesse)

r-Fairness

Ein wartender Prozess hat die Möglichkeit den kritischen Abschnitt zu betreten bevor alle anderen Prozesse gemeinsam den kritischen Abschnitt $r+1$-mal betreten können.

Beachte:

- r-Fairness impliziert r-bounded waiting
- r-bounded waiting impliziert $((n-1)\cdot r)$-Fairness

Starvation-freier Algorithmus mit Test-and-Set (2)

Programm des i. Prozesses

```
loop forever
(1)   restlicher Code
(2)   waiting[i]:=True;
(3)   key := 1;
(4)   while (waiting[i] and key=1) do
(5)       key := test-and-set(lock);
(6)   waiting[i]:=False;
(7)   Kritischer Abschnitt
(8)    if turn=i
(9)     then lturn := 1 + (turn mod n);
(10)    else lturn := turn
(11)   if waiting[lturn]
(12)    then turn := lturn;
(13)         waiting[lturn] := False;
(14)    else turn := 1+(lturn mod n);
(15)         reset(lock);
end loop
```

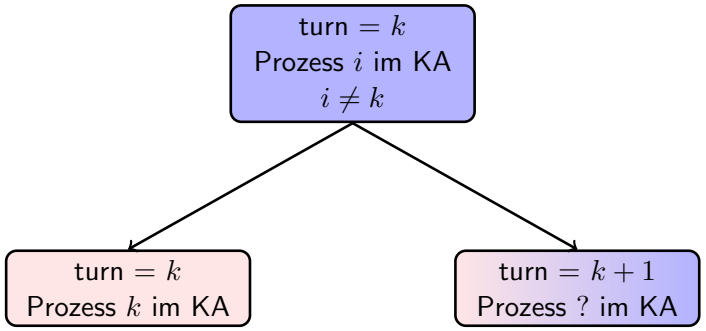
Initial:
turn: atom. Register, Wert egal (zwischen 1..n);
Test-and-set-Bit lock: 0;
waiting[i]: False;
lturn, key: lokale Register

Starvation-freier Algorithmus mit Test-and-Set (2)

- Variable turn hält Nummer eines Prozesses
- Trick: im Abschlusscode
- Lock wird „übergeben“ an Prozess mit der Nummer turn wenn er wartet
- das geschieht ohne *reset* sondern über waiting
- (Wenn turn aktueller Prozess, dann wird vorher inkrementiert)
- Wenn Prozess turn nicht wartet, dann turn erhöhen und *reset*
- Nach höchstens n mal Abschlusscode insgesamt gilt turn = j (nächste Folie)

Beweis der n-Fairness

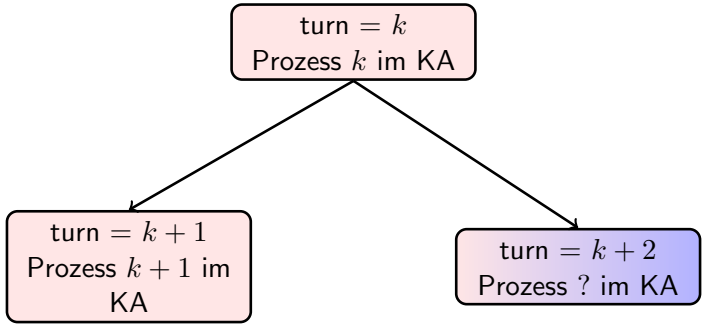
Zwei Fälle: Fall 1:



Rote Knoten = Prozess u im kritischen Abschnitt und turn = u
Blaue Knoten = Prozess u im kritischen Abschnitt und turn $\neq$ u
Rot/Blau = Beides möglich

Beweis der n-Fairness (2)

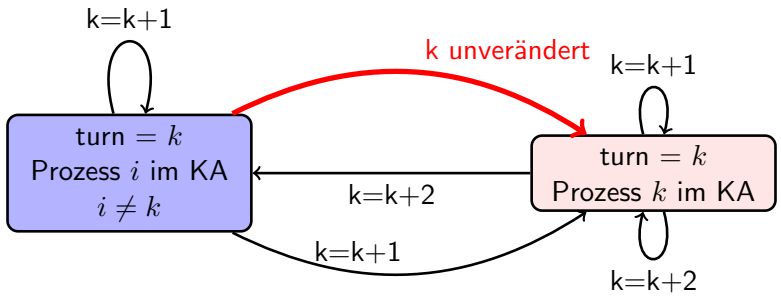
Zwei Fälle: Fall 2:



Rote Knoten = Prozess u im kritischen Abschnitt und turn = u
Blaue Knoten = Prozess u im kritischen Abschnitt und turn $\neq$ u
Rot/Blau = Beides möglich

Beweis der n-Fairness (3)

Vereinigung der Fälle:



Roter Pfeil kann erst wieder gewählt werden, wenn turn um 2 erhöht wurde!

Mutual-Exclusion Algorithmus mit RMW-Objekt

Ticket-Algorithmus mit RMW-Objekt

- M.J. Fischer, N.A. Lynch, J.E. Burns, A. Borodin 1989
- Idee ähnlich zum Bakery-Algorithmus („Nummern ziehen“).
- Feste Anzahl an Nummern reicht jedoch aus.

Ticket-Algorithmus mit RMW-Objekt (2)

Initial: (ticket,valid): Read-Modify-Write Objekt für ein Paar von Zahlen im Bereich $1 \dots n$ wobei initial ticket = valid (ticket$_i$, valid$_i$) lokales Register

Programm des i. Prozesses

```
loop forever
(1)  restlicher Code
     // erhöhe ticket (lese alte Werte):
(2)  (ticket_i,valid_i) := read-modify-write((ticket,valid), inc-fst)
(3)  while ticket_i ≠ valid_i do
(4)       valid_i := valid;
(5)  Kritischer Abschnitt
(6)  read-modify-write((ticket,valid), inc-snd) // erhöhe valid
end loop
```

Funktionen

```
function inc-fst((a,b))
  return (1+(a mod n), b)
end function
```

```
function inc-snd((a,b))
  return (a, 1+(b mod n))
end function
```

Beispiel

Prozess 1

(1) restlicher Code
(2) $(t_1,v_1) :=$ *r-m-w*((t,v), *inc-fst*)
(3) `while` $t_1 \neq v_1$ `do`
(4) $v_1 := v$;
(5) Kritischer Abschnitt
(6) *r-m-w*((t,v), *inc-snd*)

$t_1 = ?2$
$v_1 = ?12$

Prozess 2

(1) restlicher Code
(2) $(t_2,v_2) :=$ *r-m-w*((t,v), *inc-fst*)
(3) `while` $t_2 \neq v_2$ `do`
(4) $v_2 := v$;
(5) Kritischer Abschnitt
(6) *r-m-w*((t,v), *inc-snd*)

$t_2 = ?3$
$v_2 = ?1$

Prozess 3

(1) restlicher Code
(2) $(t_3,v_3) :=$ *r-m-w*((t,v), *inc-fst*)
(3) `while` $t_3 \neq v_3$ `do`
(4) $v_3 := v$;
(5) Kritischer Abschnitt
(6) *r-m-w*((t,v), *inc-snd*)

$t_3 = ?1$
$v_3 = ?1$

$t = 1231$
$v = 12$

Eigenschaften des Ticket-Algorithmus

Theorem

Der Ticket-Algorithmus garantiert wechselseitigen Ausschluss, Starvation-Freiheit und die FIFO-Eigenschaft.

Den Beweis ist einfach (Wir lassen ihn weg).

Eigenschaften des Ticket-Algorithmus (2)

Bemerkungen

- Der Ticket-Algorithmus verwendet ein RMW-Objekt mit n^2 unterschiedlichen Werten
- Bezüglich dieser Anzahl an Werten ist der Algorithmus der beste bekannte Algorithmus unter allen Algorithmen, die wechselseitigen Ausschluss, Deadlock-Freiheit und die starke FIFO-Eigenschaft garantieren.
  starke FIFO-Eigenschaft: FIFO gilt auch Initialisierungscode und im Abschlusscode
- Untere Schranke: Jeder Algorithmus für $n \geq 3$ Prozesse benötigt mindestens $\frac{n^2-3n+2}{2}$ verschiedene Zustände des gemeinsamen Speichers.

Mutual-Exclusion Algorithmus mit Warteschlange und Compare-and-Swap-Objekt

Der MCS Queue-basierte Algorithmus

- Veröffentlicht von Mellor-Crummey und Scott im Jahr 1991
- Dijkstra Preis in Distributed Computing 2006
- Benutzt ein Swap-Compare-and-Swap Objekt, d.h. Objekt mit *swap*- und *compare-and-swap*-Operation
- Prozesse reihen sich in eine Warteschlange ein
- Besonderheit: Der Abschlusscode ist nicht wait-frei
- Eigenschaften: erfüllt Mutual-Exclusion, Starvation-Freiheit und FIFO-Eigenschaft
- Es wird nur gewartet an lokalen Registern

Notation zu Zeigern

Für einen Zeiger p sei

- $*p$ der Indirektions-Operation, d.h. $*p$ liefert das Objekt, auf das der Zeiger zeigt.
- $\&p$ gibt die Speicheradresse eine Objekts (um damit Zeiger auf das Objekt zu erstellen)

Der MCS Queue-basierte Algorithmus (2)

Typen:

- Record Element: zwei Attribute: value:Bool, und next: Zeiger auf ein Element

Gemeinsame Variablen:

- nodes[i]: Feldeintrag: Inhalt ein Record vom Typ Element
- tail: Swap und Compare-and-Swap Objekt vom Typ: Zeiger auf ein Element
  Wert am Anfang: Nil

Lokale Variablen:

- mynode: Zeiger auf ein Element, am Anfang auf nodes[i]
- prev, succ: Zeiger auf Elemente

Der MCS Queue-basierte Algorithmus (3)

Programm des i. Prozesses

```
loop forever
(1)    restlicher Code
(2)    *mynode.next := Nil;
(3)    prev := mynode:
(4)    swap(tail,prev);
(5)    if prev ≠ Nil then
(6)      *mynode.value := 1;
(7)      *prev.next := mynode;
(8)      await *mynode.value = 0;
(9)    Kritischer Abschnitt
(10)   if mynode.next = Nil then
(11)     if compare-and-swap(tail,mynode,Nil) = False then
(12)       await *mynode.next ≠ Nil;
(13)       succ := *mynode.next;
(14)       *succ.value := 0;
(15)   else
(16)     succ := *mynode.next;
(17)     *succ.value := 0;
end loop
```

Der MCS Queue-basierte Algorithmus (4)

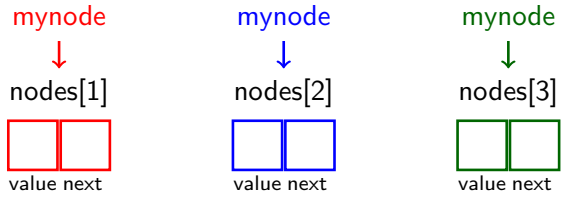
Idee:

- Prozesse reihen sich in die Warteschlange ein.
- Erster Prozess darf in den kritischen Abschnitt
- Beim Verlassen des kritischen Abchnitts gibt es mehrere Fälle:
  - kam in der Zwischenzeit ein weiterer Prozess, der sich anhängte, dann einfacher Fall: dessen Wert wird auf 0 gesetzt (* mynode.next $\neq nil$)
  - kam in der Zwischenzeit kein Prozess in den Inititalisierungscode, dann wird tail auf nil gesetzt (Fall compare-and-swap liefert True)
  - kam in der Zwischenzeit ein Prozess, der aber noch nicht fertig ist mit anhängen, dann wird gewartet bis er sich angehängt hat (Fall compare-and-swap liefert false)

Der MCS Queue-basierte Algorithmus: Beispiel

Nur ein Prozess will in den kritischen Abschnitt

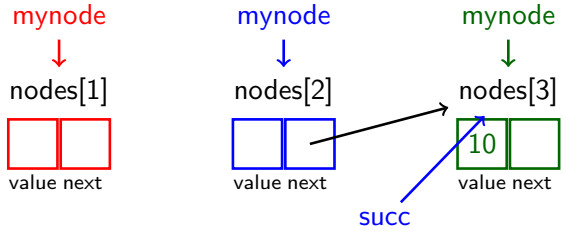
tail ⟶ Nil



Der MCS Queue-basierte Algorithmus: Beispiel (2)

Prozess 2 im KA, Prozess 3 will in den kritischen Abschnitt

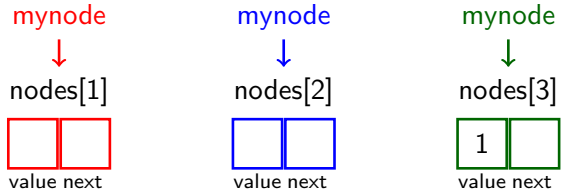
tail ⟶ Nil



Der MCS Queue-basierte Algorithmus: Beispiel (3)

Prozess 2 im KA, Prozess 3 will in KA, aber Prozess 2 fertig, bevor 3 den next-Zeiger umbiegt

tail ⟶ Nil



Konsensus und die Herlihy-Hierarchie

Fragestellung

- Jede Menge Nebenl. Objekte: Atomares Register, RMW-Objekt, Test-and-set-Objekt, usw.
- Welche Objekte sind „besser“ als die anderen?
- Was bedeutet „besser“?

Intuitiv klar:

- Atomares Register ist eher schwach (z.B. da Mutual-Exklusion schwer)
- RMW-Objekt ziemlich stark, kann viele andere Objekte implementieren

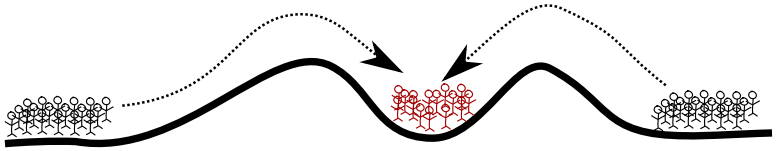
Herlihy's Modell

- Maurice Herlihy hat dies 1991 untersucht / formalisiert
- aber: Anderes Modell!
- Modell: Prozesse können jederzeit abstürzen
- Modellierung: Prozess bleibt vor einem Kommando hängen

Beachte: Alle gesehenen Mutual-Exklusion Algorithmen vertragen keine Abstürze!

Ein Beispiel für abstürzende Prozesse

Das Zwei-Generäle-Problem (auch Coordinated-Attack)

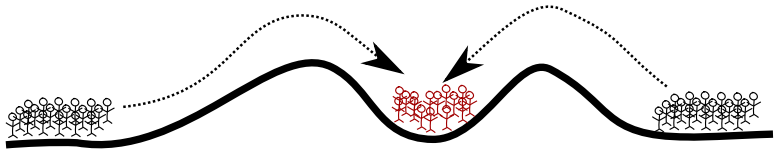


Fakten:

- Angriff nur erfolgreich, wenn beide Divisionen zeitgleich angreifen
- Kommunikation nur über **Boten**
- Boten müssen durch das Feindesland und kommen daher nicht immer an

Problem: Wie sprechen sich die Generäle ab?

Zwei Generäle Problem

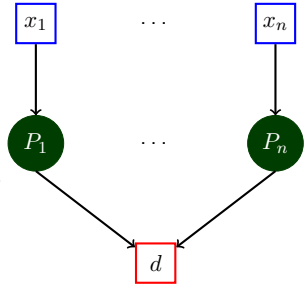


- Rechter General schickt Boten los: “Angriff um 12:00 mittags”
- Rechter General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom linken General
- Linker General schickt Boten los: “Nachricht erhalten”
- Linker General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom rechten General
- Rechter General schickt Boten los: “Nachricht erhalten”
- usw.

Tatsächlich: Problem ist unlösbar in diesem Modell!

Das Konsensus Problem

- n Prozesse, die auch abstürzen können
- Prozess i erhält einen **Eingabewert** $x_i \in \{0, 1\}$
- Programmiere die Prozesse, so dass alle (nicht-abstürzenden) Prozesse sich für einen gemeinsamen **Entscheidungswert** $d \in \{0, 1\}$ entscheiden



- **Übereinstimmung**: Alle nicht-abgestürzten Prozesse entscheiden sich für den gleichen Wert d.
- **Gültigkeit**: $d \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, d.h. d ist einer der Eingabewerte.

Beachte: Übereinstimmung $\Rightarrow$ Algorithmus ist wait-free:
Jeder nicht-abstürzende Prozess entscheidet sich nach endlich vielen Schritten

Das Konsensus Problem (2)

Bei nicht-abstürzenden Prozessen wäre das Problem einfach:

- Alle Prozesse teilen sich (über gemeinsamen Speicher) untereinander alle ihre Eingabewerte mit
- anschließend berechnet jeder Prozess $d = f(x_1, \ldots, x_n) = d$
- wobei f eine feste Funktion ist, die alle Prozesse kennen, z.B. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$.

Lösung mit dreiwertigem RMW-Objekt

Objekte und Initialisierung:
x: RMW-Objekt mit den möglichen Werten $\bot, 0, 1$, initial $\bot$
x_i: Eingabewert von Prozess i
d_i: Entscheidungswert, den Prozess i trifft.

Programm des i. Prozesses

(1) $d_i :=$ *read-modify-write*(x, f_i);
(2) `if` $d_i = \bot$ `then`
  $d_i := x_i$;

Funktion f_i des i. Prozesses

```
function f_i(v)
  if v=⊥ then return x_i
  else return v
end function
```

erster Prozess setzt sein x_i als neuen Wert,
alle anderen nicht-abstürzenden Prozesse lesen diesen Wert
$\Rightarrow$ alle d_i-Werte identisch

Lösung des Konsensusproblem

Mit dreiwertigem RMW-Objekt:

- Der Algorithmus ist eine wait-freie Lösung
- für beliebig viele Prozesse

Resultat für atomare Register mit *read* und *write*:
Selbst für 2 Prozesse und nur einen Absturz nicht lösbar:

Theorem

Es gibt keinen Konsensus-Algorithmus für atomares *read* und *write*, der einen Absturz tolerieren kann.

Folgerung: Atomare Register können kein RMW-Objekt simulieren

Beweisskizze

- Statt direkt mit Abstürzen zu argumentieren zeigen wir:
  Ein wait-freier Konsensusalgorithmus für atomare Register und 2 Prozesse existiert nicht
- Wir verwenden Berechnungsbäume, um die Ausführung der Prozesse P_1 und P_2 zu betrachten
- Knoten: Zustände der Prozesse und des Speichers
- Kanten: Wesentliche Schritte, d.h. Lese- oder Schreiboperation auf gem. Speicher
- Kante nach links $=$ Schritt von P_1
- Kante nach rechts $=$ Schritt von P_2

Beweisskizze (2)

- Blätter sind mit Entscheidungswert $\in \{0, 1\}$ markiert.
- Innere Knoten mit den noch möglichen Entscheidungswerten.
- Bivalenter Knoten: Markierung 0 und 1
- Univalenter Knoten: Markierung 0 (0-valent) oder Markierung 1 (1-valent)
- Da Algorithms wait-frei, ist der Baum endlich!

Beweisskizze (3)

Aussage: Jeder 2-Prozess Konsensusalgorithmus hat einen bivalenten Anfangszustand:
Beweis:

- Nehme an P_1 hat Eingabewert $x_1 = 0$ und P_2 hat Eingabewert $x_2 = 1$.
- Wenn nur P_1 Schritte macht (linkester Pfad im Baum), dann muss P_1 als Entscheidungswwert 0 berechnen
- Wenn nur P_2 Schritte macht, dann muss als Entscheidungswert 1 berechnet werden. □

Beweisskizze (4)

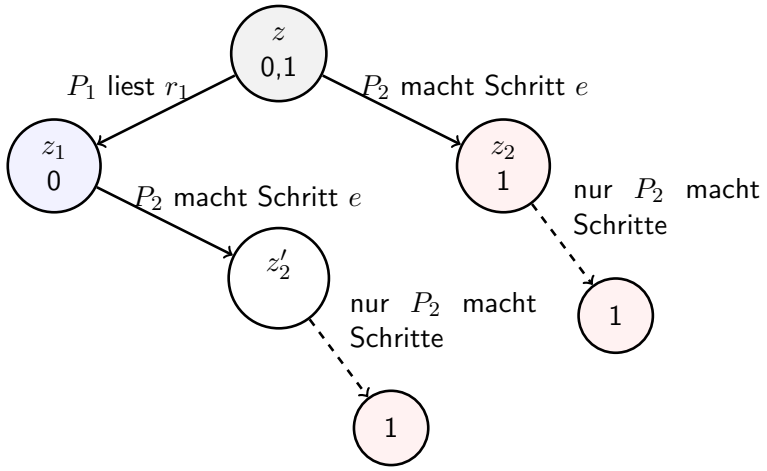
Ein Knoten ist kritisch, wenn er bivalent ist und jeder Nachfolger ist univalent.
Aussage: Jeder Berechnungsbaum zu einem Konsensusalgorithmus hat einen kritischen Knoten:
Beweis:

- Angenommen das gilt nicht.
- Starte mit einem bivalenten Anfangszustand.
- Solange es Schritte gibt, die zu einem bivalenten Zustand führen, führe diese Schritte aus.
- Wenn das unendlich lange möglich ist, dann ist der Algorithmus nicht wait-free. Widerspruch.

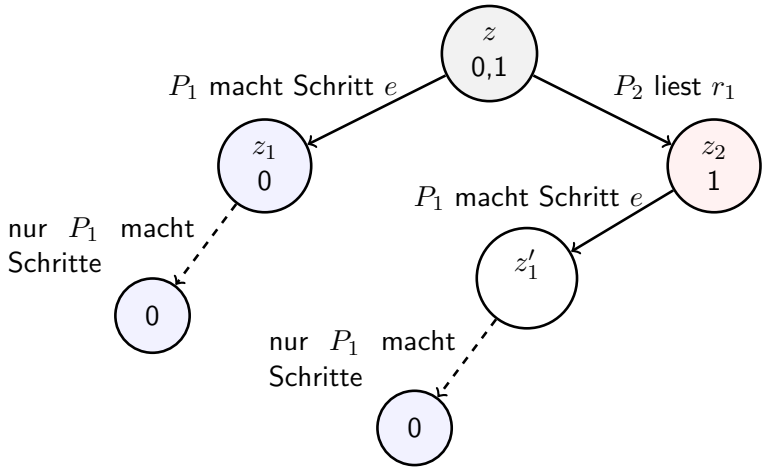
Beweisskizze (5)

- Sei nun Konsensusalgorithmus für 2 Prozesse gegeben.
- Gehe zu kritischem bivalenten Zustand z
- O.b.d.A. linkes Kind ist 0-valent, rechtes Kind ist 1-valent
- Untersuche alle Fälle.

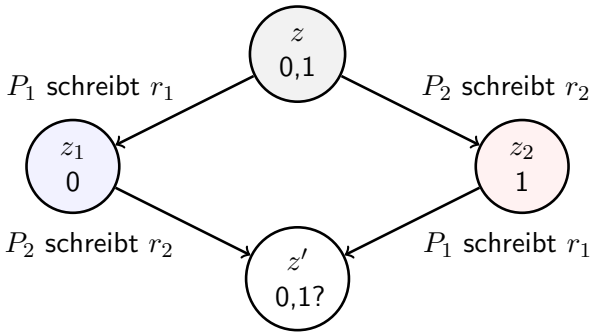
Beweisskizze (6)



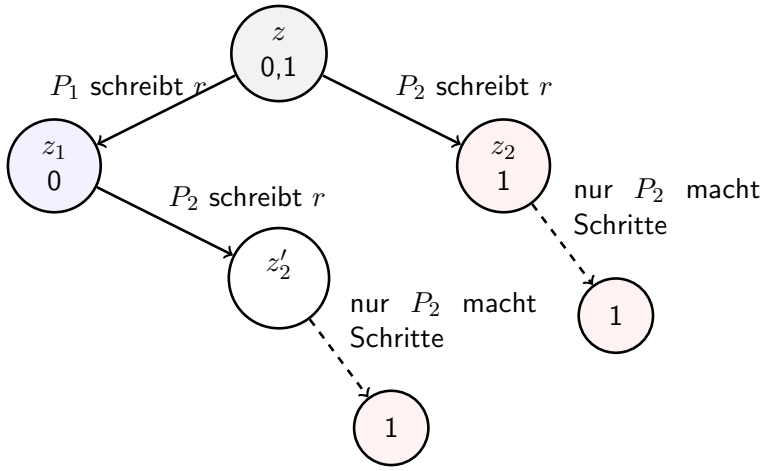
Beweisskizze (7)



Beweisskizze (8)



Beweisskizze (9)



Die Konsensus-Zahl

Definition

Für ein nebenläufiges Objekt vom Typ o ist die Konsensus-Zahl $\mathbb{CN}(o)$ die größte Zahl an Prozessen n für die man das Konsensus-Problem für n Prozesse lösen kann, indem man beliebig viele Objekte vom Typ o und beliebig viele atomare Register (mit *read* und *write*) verwendet. Ist die Anzahl unbeschränkt, so sei $\mathbb{CN}(o) = \infty$.

Konsensus-Zahl Hierarchie

$\mathbb{CN}(o)$	Objekt o
1	atomares Register mit *read* und *write*
2	test-and-set Objekt, fetch-and-increment Objekt, fetch-and-add Objekt, swap-Objekt, read-modify-write Bit
$\Theta(\sqrt{m})$	swap^m-Objekt
$2m-2$	m-Register mit m-facher Zuweisung ($m > 1$)
∞	(drei-wertiges) RMW-Objekt, Compare-and-swap-Objekt, Sticky-Bit

Eigenschaften der Konsensus-Hierarchie

Theorem

Wenn o_1 und o_2 zwei Objekte sind mit $\mathbb{CN}(o_1) < \mathbb{CN}(o_2)$, dann gilt für ein System mit $\mathbb{CN}(o_2)$ Prozessen:

- Es gibt keine wait-freie Implementierung von Objekt o_2 ausschließlich mit Objekten vom Typ o_1 und atomaren Registern.
- Es gibt eine wait-freie Implementierung von Objekt o_1 ausschließlich mit Objekten vom Typ o_2 und atomaren Registern.

Universalität

Theorem

Ein Objekt o mit $\mathbb{CN}(o) \geq n$ ist universell in einem System mit n Prozessen. D.h. jedes wait-freie Objekt (mit einer sequentiellen Beschreibung) kann durch Objekte vom Typ o und atomaren Registern in einem System mit n Prozessen implementiert werden.

- Universelle Objekte können viele andere Objekte implementieren (unabhängig vom Konsensus-Problem)
- Objekte mit Konsensus-Zahl $\geq n$ "reichen aus".