LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prinzipien, Modelle und Algorithmen der

Nebenläufigen Programmierung

Wintersemester 2019/20

Übersicht und Wiederholung

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 7. Februar 2020

1 Einleitung

1.1 Warum nebenläufige Programmierung?

1.2 Begriffe der nebenläufigen Programmierung

2 Synchronisation

2.1 Die Interleaving-Annahme

Fairness-Annahme, atomare Aktionen, bekannte Prozesse

2.2 Das Mutual-Exclusion Problem

Mutual-Exklusion, Deadlockfreiheit, Starvationfreiheit

2.3 Mutual-Exclusion Algorithmen für zwei Prozesse

Dekker, Peterson, Kessels

2.4 Mutual-Exclusion Algorithmen für n Prozesse

Lamports Algorithmus, Bakery-Algorithmus

2.5 Drei Komplexitätsresultate zum Mutual-Exclusion Problem

2.6 Stärkere Speicheroperationen

Nebenläufige Objekte (z.B. Test-and-set-Bit, RMW-Objekt, CAS-Objekt, Swap-Objekt,...) Algorithmen (Ticket-Algorithmus, MCS Algorithmus)

2.7 Konsensus und die Herlihy-Hierarchie

Prozessmodell mit Abstürzen, Konsensus-Problem, Konsensus-Zahl

3 Programmierprimitiven

3.1 Nebenläufigkeit in Java

3.2 Erweiterungen des Prozessmodells

Prozesse sind inaktiv, bereit, laufend, beendet, oder blockiert

3.3 Semaphore

Mutual-Exclusion mittels Semaphore, Varianten von Semaphore

3.4 Semaphore in Java

3.5 Anwendungsbeispiele für Semaphore

Erzeuger-Verbraucher Probleme, speisende Philosophen, Sleeping-Barber, Cigarette Smokers, Barrieren, Readers & Writers

3.6 Monitore

Condition Variablen, Arten von Monitoren, Condition Expressions

3.7 Einige Anwendungsbeispiele mit Monitoren

Readers & Writers, speisende Philosophen, Sleeping Barber, Barrieren

3.8 Monitore in Java

3.9 Kanäle Definition, Anwendungsbeispiele, Kanäle in Go

3.10 Tuple Spaces: Das Linda Modell

4 Zugriff auf mehrere Ressourcen

4.1 Deadlocks bei mehreren Ressourcen
4 notwendige Bedingungen

4.2 Deadlock-Verhinderung
2-Phasen Sperr-Protokoll (mit Timestamping), Total-Order Theorem

4,3 Deadlock-Vermeidung
Bankiers-Algorithmus

4.4 Transactional Memory
Basisprimitive, Atomare Blöcke, abort, retry, orElse, Eigenschaften von TM Systemen, Korrektheitskriterien (z.B. Sequentialisierbarkeit), TL2-Algorithmus

5 Nebenläufigkeit in der Programmiersprache Haskell

5.1 I/O in Haskell

5.2 Concurrent Haskell
MVars mit Operationen, forkIO, ...

5.3 Software Transactional Memory in Haskell
`>>=`, `return`, `retry`, `orElse`

6 Semantische Modelle nebenläufiger Programmiersprachen

6.1 Der Lambda-Kalkül

6.2 Ein Message-Passing-Modell: Der π-Kalkül
synchron / asynchron, Turing-mächtig, monadisch /polyadisch, Summen, Bisimulation

6.3 CHF-Kalkül

Im Folgenden: Auswahl wichtiger Themen / Folien

Modellannahmen

Interleaving-Annahme

Ausführung eines nebenläufigen Programms:

Sequenz der atomaren Berechnungsschritte der Prozesse, die beliebig durchmischt sein können.

Fairness-Annahme

Jeder Prozess für den ein Berechnungsschritt möglich ist, führt in der Gesamt-Auswertungssequenz diesen Schritt nach endlich vielen Berechnungsschritten durch.

Das Mutual-Exclusion-Problem, formales Modell

Code-Struktur jedes Prozesses

```
loop forever
    restlicher Code
    Initialisierungscode
    Kritischer Abschnitt
    Abschlusscode
end loop
```

Annahmen

- Programmvariablen, des Initialisierungscodes u. Abschlusscodes werden werden durch den Code im Kritischen Abschnitt und den restlichen Code nicht verändert.
- Keine Fehler bei Ausführung des Initialisierungscode, des Codes im kritischen Abschnitt und im Abschlusscode
- Code im kritschen Abschnitt und im Abschlusscode: Nur endlich viele Ausführungsschritte

Korrektheitskriterien

Lösung des Mutual-Exclusion-Problems

Fülle Initialisierungs- und Abschlusscode, so dass die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

- Wechselseitiger Ausschluss: Es sind niemals zwei oder mehr Prozesse zugleich in ihrem kritischen Abschnitt.
- Deadlock-Freiheit: Wenn ein Prozess seinen kritischen Abschnitt betreten möchte, dann betritt irgendein Prozess schließlich den kritischen Abschnitt.

Starvation-Freiheit

Wenn ein Prozess seinen kritischen Abschnitt betreten möchte, dann muss er ihn nach endlich vielen Berechnungsschritten betreten.

Algorithmus von Peterson

Initial: wantp = False, wantq = False, turn egal

Prozess P:

```
     loop forever
(P1)   restlicher Code
(P2)   wantp := True;
(P3)   turn := 1;
(P4)   await wantq = False or turn = 2
(P5)   Kritischer Abschnitt
(P6)   wantp := False;
     end loop
```

Prozess Q:

```
     loop forever
(Q1)   restlicher Code
(Q2)   wantq := True;
(Q3)   turn := 2;
(Q4)   await wantp = False or turn = 1
(Q5)   Kritischer Abschnitt
(Q6)   wantq := False;
     end loop
```

Komplexitätsresultate bei atomarem Lesen & Schreiben

Untere Schranke für den Platz:

Theorem

Jeder Deadlock-freie Mutual-Exclusion Algorithmus für n Prozesse benötigt mindestens n gemeinsam genutzte Speicherplätze.

Obere Schranke für den Platz:

Theorem

Es gibt einen Deadlock-freien Mutual-Exclusion Algorithmus für n Prozesse der n gemeinsame Bits verwendet.

Laufzeit lässt sich nicht beschränken:

Theorem

Es gibt keinen (Deadlock-freien) Mutual-Exclusion Algorithmus für 2 (oder auch n) Prozesse, der eine obere Schranke hat für die Anzahl an Speicherzugriffen (des gemeinsamen Speichers), die ein Prozess ausführen muss, bevor er den kritischen Abschnitt betreten darf.

Stärkere Speicheroperationen

Notation

```
function xyz(p1 : Typ_1, ..., p_n : Typ_n...) returns : Typ
    "atomare Ausführung des Rumpfs"
end function
```

test-and-set(r, v)

```
function test-and-set(r : Register, v : Wert) returns : Wert
    temp := r;
    r := v;
    return(temp);
end function
```

swap

```
function swap(r : Register, l : Lokales Register)
    temp := r;
    r := l;
    l := temp;
end function
```


Stärkere Speicheroperationen (2)

fetch-and-add

```
function fetch-and-add(r : Register, v : Wert) returns : Wert
    temp := r;
    r := temp + v;
    return(temp);
end function
```

read-modify-write

```
function read-modify-write(r : Register, f : Funktion)
  returns : Wert
    temp := r;
    r := f(temp);
    return(temp);
end function
```


Stärkere Speicheroperationen (3)

compare-and-swap

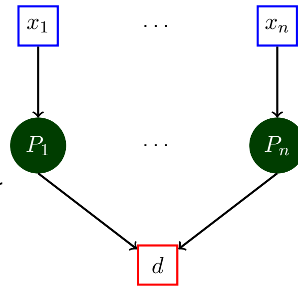
```
function compare-and-swap(r : Register, old : Wert, new : Wert)
 returns : Wert
  if r = old then
      r := new;
      return(True);
  else
      return(False);
end function
```

move

```
function move(r_1 : Register, r_2 : Register)
    temp := r_2;
    r_1 := temp;
end function
```

Das Konsensus Problem

- n Prozesse, die auch abstürzen können
- Prozess i erhält einen **Eingabewert** $x_i \in \{0, 1\}$
- Programmiere die Prozesse, so dass alle (nicht-abstürzenden) Prozesse sich für einen gemeinsamen **Entscheidungswert** $d \in \{0, 1\}$ entscheiden



- **Übereinstimmung**: Alle nicht-abgestürzten Prozesse entscheiden sich für den gleichen Wert d.
- **Gültigkeit**: $d \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, d.h. d ist einer der Eingabewerte.

Lösung mit dreiwertigem RMW-Objekt

Objekte und Initialisierung:
x: RMW-Objekt mit den möglichen Werten $\perp, 0, 1$, initial $\perp$
x_i: Eingabewert von Prozess i
d_i: Entscheidungswert, den Prozess i trifft.

Programm des i. Prozesses

(1) $d_i :=$ *read-modify-write*(x, f_i);
(2) `if` $d_i = \perp$ `then`
$\quad d_i := x_i$;

Funktion f_i des i. Prozesses

```
function fi(v)
  if v=⊥ then return xi
  else return v
end function
```

erster Prozess setzt sein x_i als neuen Wert, alle anderen nicht-abstürzenden Prozesse lesen diesen Wert
$\Rightarrow$ alle d_i-Werte identisch

Die Konsensus-Zahl

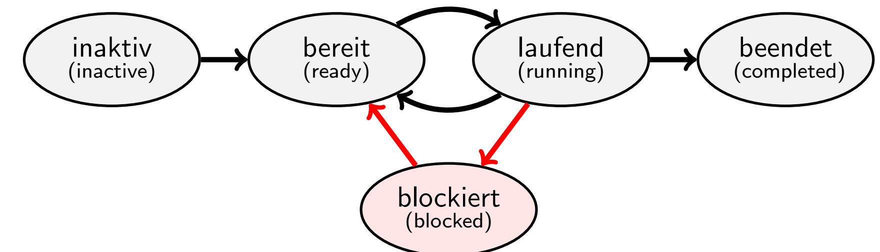
Definition

Für ein nebenläufiges Objekt vom Typ o ist die Konsensus-Zahl $\mathbb{CN}(o)$ die größte Zahl an Prozessen n für die man das Konsensus-Problem für n Prozesse lösen kann, indem man beliebig viele Objekte vom Typ o und beliebig viele atomare Register (mit *read* und *write*) verwendet. Ist die Anzahl unbeschränkt, so sei $\mathbb{CN}(o) = \infty$.

$\mathbb{CN}(o)$	Objekt o
1	atomares Register mit *read* und *write*
2	test-and-set Objekt, fetch-and-increment Objekt, fetch-and-add Objekt, swap-Objekt, read-modify-write Bit
$\Theta(\sqrt{m})$	swap^m-Objekt
$2m-2$	m-Register mit m-facher Zuweisung $(m > 1)$
∞	(drei-wertiges) RMW-Objekt, Compare-and-swap-Objekt, Sticky-Bit

Erweitertes Prozessmodell

Prozesse P haben einen Zustand P.state:



Semaphor S

Attribute (i.a.):

- V = Nicht-negative Ganzzahl
- M = Menge von Prozessen

Schreibweise für Semaphor S: $S.V$ und $S.M$

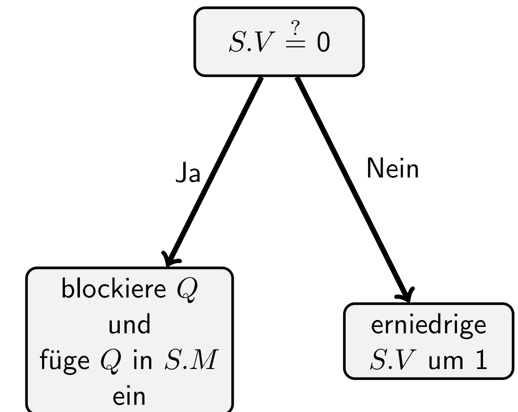
Operationen:

- `newSem`(k): Erzeugt neuen Semaphor mit $S.V = k$ und $S.M = \emptyset$
- `wait`(S)
- `signal`(S)

`wait`(S)

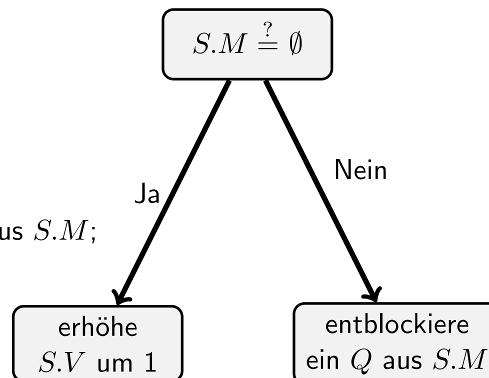
Sei Q der aufrufende Prozess:

```
procedure wait(S)
  if S.V > 0 then
     S.V := S.V − 1;
  else
     S.M := S.M ∪ {Q};
     Q.state := blocked;
```



`signal`(S)

```
procedure signal(S)
  if S.M = ∅ then
     S.V := S.V + 1;
  else
     wähle ein Element Q aus S.M;
     S.M := S.M \ {Q};
     Q.state := ready;
```



Erzeuger / Verbraucher

- Erzeuger: Produziert Daten
- Verbraucher: Konsumiert Daten
- Beispiel: Tastatur / Betriebssystem usw.

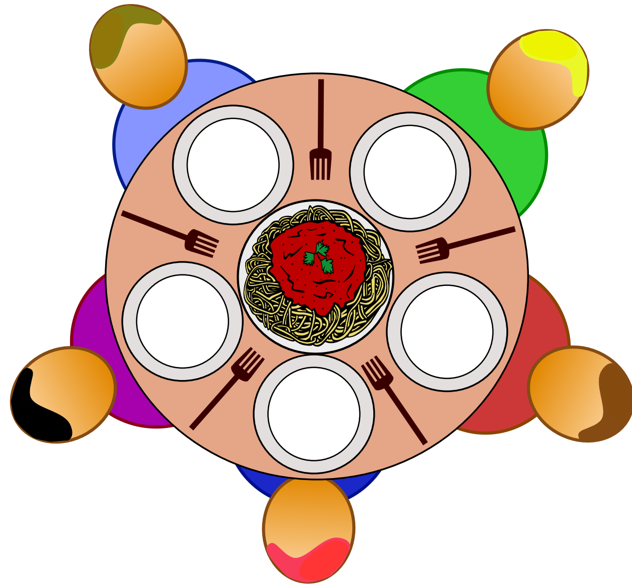
Erzeuger / Verbraucher mit infinite Buffer:

- Lesen / Schreiben auf den Puffer sicher (atomar)
- Verbraucher braucht Schutz für den Fall, dass der Puffer leer ist

Erzeuger / Verbraucher mit bounded Buffer:

- Lesen / Schreiben auf den Puffer sicher (atomar)
- Verbraucher braucht Schutz für den Fall, dass der Puffer leer ist
- Erzeuger braucht Schutz für den Fall, dass der Puffer voll ist

Speisende Philosophen



Speisende Philosophen

Situation

- Philosoph denkt oder isst Spaghetti, abwechselnd
- Philosoph braucht beide Gabeln zum Essen
- Philosoph nimmt Gabeln nacheinander

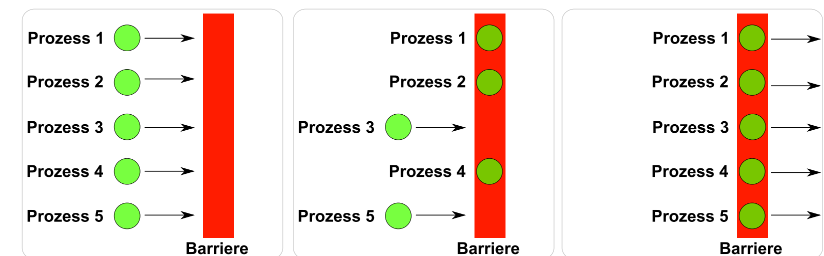
Anforderungen:

- Kein Deadlock: Irgendein Philosoph kann nach endlicher Zeit immer essen
- Kein Verhungern: Jeder Philosoph isst nach endlicher Zeit

Barrieren

- Manche Algorithmen erfordern "Phasen"
- D.h.: Die Prozesse führen Berechnungen durch, aber an einem Schritt warten alle Prozesse aufeinander
- Erst wenn alle an dieser Stelle angekommen sind, dürfen die Prozesse weiter rechnen
- Ähnlich war es beim Mergesort-Beispiel, dort wartet allerdings nur ein Prozess auf zwei weitere

Allgemeines Schema



Readers & Writers

Gruppierung der Prozesse in

- Readers: Prozesse, die auf eine gemeinsame Ressource lesend zugreifen
- Writers: Prozesse, die auf die gemeinsame Ressource schreibend zugreifen

Erlaubt / Nicht erlaubt

- Mehrere lesende Prozesse gleichzeitig, aber
- Nur ein Prozess schreibt gleichzeitig

Problem:

- Löse den Zugriff so, dass viele gleichzeitig lesen, aber nie mehrere gleichzeitig schreiben.

Verschiedene Lösungen:

- Priorität für Readers
- Priotität für Writers

Monitore

```
monitor Konto {
  int Saldo;
  int Kontonummer;
  int KundenId

  abheben(int x) {
    Saldo := Saldo - x;
  }

  zubuchen(int x) {
    Saldo := Saldo + x;
  }
}
```

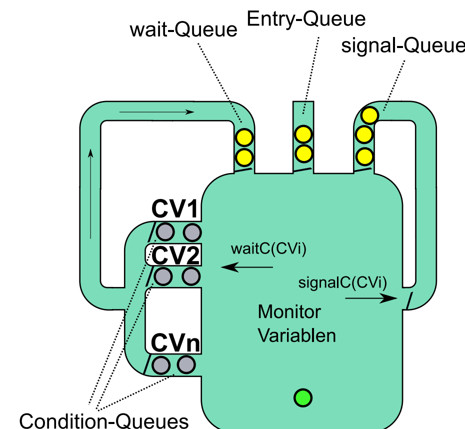
- Kapselung von Daten und Methoden
- Kein direkter Zugriff auf Attribute
- Zugriff nur über die Methoden
- Nur ein Prozess kann zu einer Zeit im Monitor sein
- D.h. nur eine Methode von einem Prozess zu einer Zeit am Ausführen
- Andere Prozesse werden blockiert

Monitore mit Condition Variables

- FIFO-Queue (meistens) mit Operationen
- Name der Condition Variables wird meistens so gewählt, dass er die wahr werdene Bedingung erläutert, aber
- Operationen für Condition Variable cond: `waitC(cond)` und `signalC(cond)`

Semaphore Sem	Monitore (Condition Variable cond)
`wait(Sem)` kann zum Blockieren führen, muss aber nicht	`waitC(cond)` blockiert den Prozess stets
`signal(Sem)` hat stets einen Effekt: Entblockieren eines Prozesses oder Erhöhen von Sem.V	`signalC(cond)` kann effektlos sein: Entweder Prozess in cond wird entblockiert, oder effektlos, wenn cond leer ist

Monitor-Modellierung mit drei Queues für die Condition Variable



Prioritäten

1	$E = W = S$	
2	$E = W < S$	Wait and Notify
3	$E = S < W$	Signal and Wait
4	$E < W = S$	
5	$E < W < S$	Signal and Continue
6	$E < S < W$	Klassische Definition
7	$E > W = S$	nicht sinnvoll
8	$E = S > W$	nicht sinnvoll
9	$S > E > W$	nicht sinnvoll
10	$E = W > S$	nicht sinnvoll
11	$W > E > S$	nicht sinnvoll
12	$E > S > W$	nicht sinnvoll
13	$E > W > S$	nicht sinnvoll

- **Wartende Prozesse: Verwaltung durch Monitor.lock**
- **Wartende Prozesse: Verwaltung durch Condition**
- **Prozess im Monitor**

Monitore in Java

```
class MonitoredClass {
  ... Attribute ...
  synchronized method1 {...}

  synchronized method2 {...}
```

Statt Condition Variables

- Operationen `wait`, `notify`, `notifyAll`
- Nur eine Queue pro Objekt
- `wait`(): Thread wartet an der Queue des Objekts
- `notify`(): Ein wartender Thread wird entblockiert, aber:
  Aufrufender Prozess behält Lock!
- `notifyAll`(): Alle wartende Threads werden entblockiert, aber:
  Aufrufender Prozess behält Lock!
- Wartende Threads haben gleiche Priorität wie neue!
- Entspricht $W = E < S$

Kanäle: Operationen

- ch ⇐ w
  - entspricht: "sende w über den Kanal ch"
  - dabei ist w ein Wert vom passenden Typ
  - wir schreiben auch ch ⇐ x, für eine Programmvariable x
    Semantik: Sende den Wert der Variablen x über Kanal ch
  - in Go: `ch <- w`
- ch ⇒ x
  - entspricht "empfange über den Kanal ch und setze Variable x auf den empfangenen Wert"
  - Hier: Nur Variablen erlaubt!
  - In Go: `x := <- ch`

Tuple Spaces: Operationen

$\texttt{out}(N, v_1, \ldots, v_n)$:

- Einfügen eines Tupels in den Tuple Space
- N: Name (String)
- v_i: Programmvariable oder Wert
- Wenn v_i Programmvariable,
  dann wird der aktuelle Wert von v_i eingefügt

$\texttt{in}(N, x_1, \ldots, x_n)$:

- Entfernen eines Tupels aus dem Tuple Space
- N: Name (String), x_i: Programmvariable
- Im Tuple Space muss ein "Matching Tuple" vorhanden sein
  (= gleiche Länge, gleiche Typen, gleiche Werte)
- Falls kein passendes Tuple vorhanden: Prozess blockiert
- Ansonsten: Variablen werden durch das Entfernen an die Werte gebunden

$\texttt{read}(N, x_1, \ldots, x_n)$: Wie in aber ohne Entfernen des Tupels

Mutual-Exclusion mit Tuple Spaces

Initial: Tupel ("MUTEX") im Tuple Space

Prozess i:

```
loop forever
(1)  Restlicher Code;
(2)  in("MUTEX");
(3)  Kritischer Abschnitt;
(4)  out("MUTEX");
end loop
```

Wann tritt globaler Deadlock auf?

Vier notwendige Bedingungen (alle gleichzeitig erfüllt):

1. Wechselseitiger Ausschluss (Mutual-Exclusion): Nur ein Prozess kann gleichzeitig auf eine Ressource zugreifen,
2. Halten und Warten (Hold and Wait): Ein Prozess kann eine Ressource anfordern (auf eine Ressource warten), während er eine andere Ressource bereits belegt hat.
3. Keine Bevorzugung (No Preemption): Jede Ressource kann nur durch den Prozess freigegeben (entsperrt) werden, der sie belegt hat.
4. Zirkuläres Warten: Es gibt zyklische Abhängigkeit zwischen wartenden Prozessen: Jeder wartende Prozess möchte Zugriff auf die Ressource, die der nächste Prozesse im Zyklus belegt hat.

Deadlock-Verhinderung: Verhindern von Hold and Wait

- Möglichkeit: Prozess fordert zu Beginn alle Ressourcen an, die er benötigt.
- Philosophen: Exklusiver Zugriff auf alle Gabeln
- 1. Problem: Evtl. zu sequentiell
- 2. Problem: Oft nicht klar, welche Ressourcen jeder Prozess braucht
- Variation dieser Lösung: 2-Phasen Sperrprotokoll

2-Phasen Sperrprotokoll

Die Prozesse arbeiten in zwei Phasen

Jeder Prozess führt dabei aus:

- 1. Phase: Der Prozess versucht alle benötigten Ressourcen zu belegen.
  Ist **eine** benötigte Ressource **nicht frei**, so gibt der Prozess **alle** belegten Ressourcen zurück und der Prozess startet von neuem mit Phase 1.
- 2. Phase: Der Prozess hat alle benötigten Ressourcen
  Nachdem er fertig mit seiner Berechnung ist, gibt er alle Ressourcen wieder frei.

Timestamping-Ordering

- Prozesse erhalten eindeutigen Zeitstempel, wenn sie beginnen.

Zwei-Phasen Sperrprotokoll mit Timestamping

Jeder Prozess geht dabei so vor:

- 1. Phase: Der Prozess versucht alle benötigten Ressourcen auf einmal zu sperren.
  Ist eine benötigte Ressource belegt mit **kleinerem Zeitstempel**, dann gibt Prozess **alle** Ressourcen frei und startet von neuem.
  Ist **eigener** Zeitstempel **kleiner**, dann wartet der Prozess auf die restlichen Ressourcen.
- 2. Phase: Wenn der Prozess erfolgreich in diese Phase gekommen ist, hat er alle benötigten Ressourcen. Er benutzt sie und gibt sie anschließend wieder frei.

Beachte: Neue Zeitstempel werden nur vergeben, nach erfolgreichem Durchlauf durch beide Phasen.

Deadlock-Verhinderung: Keine Zirkularität zulassen, Total-Order Theorem

Total-Order Theorem

Sind alle gemeinsamen Ressourcen durch eine totale Ordnung geordnet und jeder Prozess belegt seine benötigten Ressourcen in aufsteigender Reihenfolge bezüglich der totalen Ordnung, dann ist ein Deadlock unmöglich.

Deadlock-Vermeidung: Bankier-Algorithmus

function testeZustand($\mathcal{P}$, $\overrightarrow{A}$):
  if $\mathcal{P} = \emptyset$ then
    return "sicher"
  else
    if $\exists P \in \mathcal{P}$ mit $\overrightarrow{M_P} - \overrightarrow{C_P} \leq \overrightarrow{A}$ then
      $\overrightarrow{A} := \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C_P}$;
      $\mathcal{P} := \mathcal{P} \setminus \{P\}$;
      testeZustand($\mathcal{P}, \overrightarrow{A}$)
    else
      return "unsicher"

Transactional Memory

atomic-Blöcke:

atomic {
  Code der Transaktion
}

Der retry-Befehl

- Ermöglicht es Transaktionen zu koordinieren
- retry: Transaktion wird abgebrochen (Roll-back) und erneut gestartet

Der orElse-Befehl

- Gibt Alternativen vor, wenn Transaktionen abbrechen
- T_1 orElse T_2.

Korrektheitskriterien für STM-Systeme

Historie= Folge von Ereignissen, wobei Ereignis:

- Aufrufe & Rückgaben v. READ(x), WRITE(x,v), COMMIT, ABORT
- Spezialwert A_T = Transaktion T ist abgebrochen.

Sequentialisierbarkeit

- Historie der einzelnen Read/Write-Zugriffe der **erfolgreichen** Transaktionen
- Historie des nebenläufigen Ablaufs ist **äquivalent** zur Historie eines sequentiellen Ablaufs aller erfolgreichen Transaktionen.

Äquivalenz:
Zwei Historien sind äquivalent, wenn die Ereignissefolge pro Transaktion dieselbe ist (d.h. gleiche Reihenfolge innerhalb einer Transaktion und gleiche Rückgaben).

Sequentieller Ablauf:
Die Ereignisse verschiedener Transaktionen treten nicht verzahnt sondern sequentiell nacheinander auf.

Concurrent Haskell

- `forkIO :: IO () -> IO ThreadId`
- Terminierung des main-Threads, beendet alle Threads
- `newEmptyMVar :: IO (MVar a)`
  erzeugt leere `MVar`
- `takeMVar :: MVar a -> IO a`
  - liest Wert aus `MVar`, danach ist die `MVar` leer
  - falls `MVar` vorher leer: Thread wartet
  - Bei mehreren Threads: FIFO-Warteschlange
- `putMVar :: MVar a -> a -> IO ()`
  - speichert Wert in der `MVar`, wenn diese leer ist
  - Falls belegt: Thread wartet
  - Bei mehreren Threads: FIFO-Warteschlange

STM-Haskell

- `atomically :: STM a -> IO a` überführt eine STM-Aktion in eine IO-Operation
- `data TVar a = ...`
- `newTVar :: a -> STM (TVar a)`
  Erzeugt eine neue `TVar` mit Inhalt
- `readTVar :: TVar a -> STM a`
  Liest den den momentanen Wert einer `TVar`
- `writeTVar :: TVar a -> a -> STM ()`
  Schreibt einen neuen Wert in die `TVar`
- `newTVarIO :: TVar a -> a -> IO (TVar a)`
  Erzeugen einer TVar in der IO Monade
- `retry :: STM a`
- `>>=, >>, do`
- `orElse :: STM a -> STM a -> STM a`

Synchroner π-Kalkül ohne Summe mit Replikation

Syntax

- $\mathcal{N}$ abzählbar unendliche Menge von Namen (ähnlich zu Variablen)
- Syntax für π-Kalkül-Prozesse ($x \in \mathcal{N}$)

$$
\begin{array}{rcll}
P & ::= & \pi.P & \text{(Aktion)} \\
& \mid & P_1 \mid P_2 & \text{(Parallele Komposition)} \\
& \mid & !\,P & \text{(Replikation)} \\
& \mid & \mathbf{0} & \text{(Inaktiver Prozess)} \\
& \mid & \nu x.P & \text{(Restriktion)}
\end{array}
$$

- Syntax für Aktionspräfixe wobei $x, y \in \mathcal{N}$

$$
\begin{array}{rcll}
\pi & ::= & x(y) & \text{Input} \\
& \mid & \overline{x}y & \text{Output}
\end{array}
$$

Operationale Semantik

Reduktionsregeln

(INTERACT)	$x(y).P \mid \overline{x}v.Q \to P[v/y] \mid Q$
(PAR)	$P \mid Q \to P' \mid Q$, falls $P \to P'$
(NEW)	$\nu x.P \to \nu x.P'$, falls $P \to P'$
(STRUCTCONGR)	$P \to P'$, falls $Q \to Q'$, $P \equiv Q$ und $P' \equiv Q'$

Weiteres zum π-Kalkül

- Turing-mächtig (da Lambda-Kalkül simulierbar)
- asychron vs. synchron
- monadisch vs. polyadisch
- Rekursion vs. Replikation