Komplexitätstheorie, WS 04/05
Mitschrift vom 20.10.2004

Andreas Brünnert

Wiederholung Turingmaschine

- Definition: $T = (Q, \Sigma, I, q_0, F)$
- deterministische Turingmaschine:
  für alle $q \in Q$ und $s \in \Sigma^*$ gibt es höchstens ein Quintupel $(q, s, s', \ldots) \in I$ andernfalls ist es eine nichtdeterministische Turingmaschine
- Globaler Zustand:
  $S = (q, b)$ mit $q \in Q$, $b \in Band^k$ mit $Band \hat{=}$ endliche Beschreibung von Bandinhalt + Kopfposition. Mehrere Möglichkeiten der Darstellung sind denkbar: z.B.
  - Band $= \Sigma^* \times \Sigma \times \Sigma^*$
  - Band $= \Sigma^* \times \mathbf{N}$ mit $(w, n) \in$ Band $\to n \leq\mid w \mid$
- Globaler Anfangszustand:
  Zu gegebenen $w \in \Sigma^*$ ist die globale Anfangskonfiguration $S_0 = (q_0, b_0)$ wobei in b_0 die Eingabe $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ auf Band 1 steht:
  $\mid w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_n \mid \Box \mid \ldots$
  auf allen übrigen Bändern stehen nur $\Box$:
  $\mid \Box \mid \Box \mid \Box \mid \ldots$
  alle Köpfe befinden sich links.

Funktion der Beispielmaschine:

- Zustand q_0
  - Lfd. Nr. 1 leeres Wort wird akzeptiert.
    $\mid \Box \mid \ldots$
    $\mid \Box \mid \ldots$

  - Lfd. Nr. 2 jedes Wort, was mit 1 beginnt, wird verworfen.
    $| 1 | 0 \ldots$
    $| \Box | \ldots$
  - Lfd. Nr. 3 0 auf Band 1 wird auf Band 2 kopiert. Übergang in Zustand q_3.
    $| 0 | \ldots$
    $| 0 | \ldots$

- Zustand q_3
  - Lfd. Nr. 4 Solange auf Band 1 0 gelesen wird, wird auf Band 2 eine 1 geschrieben. Beide Köpfe wandern nach rechts.
    $| 0 | 0 | 0 | \ldots$
    $| 0 | 1 | \Box | \ldots$
  - Lfd. Nr. 5 Folgt auf eine Null ein $\Box$ wird das Wort verworfen.
    $| 0 | 0 | 0 | \Box | \ldots$
    $| 0 | 1 | 1 | \ldots$
  - Lfd. Nr. 6 Folgt auf die 0 eine 1 schreibe auf Band 2 # und wandere auf Band 2 nach Links.
    $| 0 | 0 | 0 | 1 | \ldots$
    $| 0 | 1 | 1 | \# | \ldots$

- Zustand q_4
  - Lfd. Nr. 8 Solange auf beiden Bändern eine 1 gelesen wird, bleibe im Zustand q_4. Gehe auf Band 1 nach rechts auf Band 2 nach links.
    $| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | \ldots$
    $| 0 | 1 | 1 | \# | \ldots$
  - Lfd. Nr. 9 Steht auf Band 1 ein $\Box$ und auf Band 2 eine 1, verwerfe das Wort.
    $| 0 | 0 | 0 | 1 | \Box | \ldots$
    $| 0 | 1 | 1 | \# | \ldots$
  - Lfd. Nr. 10 Folgt auf Band 1 eine 1 und auf Band 2 eine 0 akzeptiere das Wort.
    $| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | \Box | \ldots$
    $| 0 | 1 | 1 | \# | \ldots$
  - Lfd. Nr. 11 Steht auf Band 1 ein $\Box$ und auf Band 2 eine 0 verwerfe das Wort.

| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | □ | ...
| 0 | 1 | 1 | # | ...

$\Rightarrow$ die Turingmaschine akzeptiert folgende kontextfreie Sprache:
$L(T) = \{0^n 1^n,\ n \in \mathbf{N}\}$
Durch Übergangstafel I wird Übergangsrelation $\rightarrow$ induziert. Weil DTM gibt es für jedes S höchstens ein S' mit $S \rightarrow S'$.
$\rightsquigarrow$ es gibt eine eindeutige Folge $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \ldots \rightarrow S_i \rightarrow \ldots$
"Berechnung der Maschine bei Eingabe w"
Es gibt 2 Arten von Berechnungen von DTM:

- endlich $\hat{=}$ Maschine hält.
- unendlich $\hat{=}$ Maschine hält nicht.

Eine akzeptiertende DTM (engl.: acceptor) hat genau 2 Endzustände

- DTM T mit mit $F = \{Acc, Rej\}$

$\rightarrow$ jede endliche Berechnung endet in Acc, Rej
T akzeptiert w, wenn Berechnung bei Eingabe w in Acc endet.
Akzeptierte Sprache: $L(T) = \{w;\ \text{T akzeptiert } w\}$
$\Rightarrow$ Man kann alle möglichen Entscheidungsprobleme modellieren.
TM die Sprache akzeptiert $\rightarrow$ löst Entscheidungsproblem

Zeitkomplexität:

Für DTM T und Eingabe w sei $TIME_T(w) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$
definiert als die Anzahl der Berechnnungsschritte die DTM T ausführt.

Komplexitätsklassen:

$\mathbf{P} = \{L \in \Sigma^*; \exists DTMk \in \mathbf{N} \text{ mit } \forall w\ TIME_T(w) = O(|\ w\ |^k)\}$
Die Menge derjenigen Sprachen aus Σ^* für die es eine DTM gibt, die die Sprache erkennt und zeitlich durch ein Polynom beschränkt ist.
Analog dazu die weiteren Klassen:
$\mathbf{E} = \{L \in \Sigma^*; \exists DTMT, k \in \mathbf{N} \text{ mit } \forall w\ TIME_T(w) = O(2^{k|w|})\}$
$\mathbf{EXP} = \{L \in \Sigma^*; \exists DTMT, k \in \mathbf{N} \text{ mit } \forall w\ TIME_T(w) = O(2^{|w|^k})\}$
$\mathbf{2E} = \{L \in \Sigma^*; \exists DTMT, k \in \mathbf{N} \text{ mit } \forall w\ TIME_T(w) = O(2^{2^{k|w|}})\}$
Zusätzlich gibt noch weitere Komplexitätsklassen, die z.B. durch Funktionen wie $O(2^{2^{2^{\cdots}}} \}|x| \text{ mal})$ beschränkt sind.

Klar aus der Definition: $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{2E} \subseteq \ldots$
Beachte: Notation für Klassen außerhalb **P** sind oft nicht eindeutig,
E heißt manchmal auch **ETIME**, **EXP** oder **EXPTIME** ...
EXP heißt manchmal auch **EXPTIME**
Beachte: Die Klassen sind sehr "robust" $\rightarrow$ Änderung des Maschinenmodells, z.B. in eine Mehrdimensionale DTM oder eine Random Access Maschine, ändert nicht die Komplexitätsklasse.
Bemerkung: Die Klasse **P** gilt als theoretische Modellierung des Begriffs "effizient Berechenbar". Wobei diese Begrifflichkeit eher fragwürdig ist, denn für nicht allzugroße n wäre eine Zeitkomlexität von z.B. $1,2333^n$ wohl schneller als n^{23324}.
Bemerkenswert ist auch, dass die Klasse **P** Probleme enthält für die es keinen polynomiellen Algorithmus gibt, bzw. kein polynomieller Algorithmus bekannt ist, z. B. einige Probleme aus der Graphentheorie.
Lemma 1: Für jede k-Band DTM T gibt es eine 2-Band DTM T' mit
$L(T') = L(T)$ und $TIME_T(w) = O(TIME_T(w)^2)$,
d.h. k-Band Maschinen lassen sich durch 2-Band Maschinen simulieren, wenn man den Zeitaufwand quadriert.
Beweis: Simulation von T durch T'. T' hat $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$
auf Band 1 sind die Bänder von T, getrennt durch ein #, codiert:
Band 1 | # | Band 2 | # | Band 3 | # |...
auf Band 2 sind die Kopfpositionen markiert:
$\Box\Box \uparrow \Box \mid \# \mid \Box \uparrow \Box\Box \mid \# \mid \Box \uparrow \Box\Box \mid \# \mid \ldots$

Beschreibung der Simulation:
Laufe beide Bänder ab, sehe auf Band 2 nach, wo sich der Kopf befindet, und führe an dieser Position auf Band 1 die Änderung durch. Problematisch ist dabei, wenn am Ende eines simulierten Bandes weitere Zeichen hinzugefügt werden müssen, da alle nachkommenden simulierten Bänder um die Länge der eingefügten Zeichen weitergeschoben werden müssen.
Sei $TIME_T(w) = t$
Länge von Band 1 ist $k(t+1)$, d.h. jeder Schritt von T wird durch höchstens $k^2(t+1)$ Schritte von T' simuliert.
$\Rightarrow$ Gesamtzeit der Simulation $tk^2(t+1) = O(t^2)$

Nächstes mal: $\mathbf{P} \neq \mathbf{E}$

Dazu Betrachten wir folgendes Problem:
$H_{exp} = \{(T, w)); T$ 2-Band DTM, $w \in \Sigma^*$ und T akzeptiert w in $2^{|w|}$ Schritten $\}$.
Wir zeigen, dass H_{exp} in **E** aber nicht in **P** liegt.