Monotone Schaltkreise

- verwenden keine $\neg$-Gatter

=> berechnen <u>nur</u> monotone Funktionen

$$(x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n))$$

Graphen auf $V = \{1, \ldots, n\}$ als Eingabe mit $\binom{n}{2}$ Variablen x_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$

Damit sind zahlreiche interessante Graphproblemen monoton:

- Erreichbarkeit
- Zusammenhang
- Clique
- …

Betrachte die Funktion Δ mit:

$$\Delta(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{es gibt } i, j, k \text{ mit } x_{ij} = x_{jk} = x_{ik} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also $\Delta(\vec{x}) = 1$, wenn den eingegebenen Graph ein Dreieck enthält.

Theorem 2

Jeder monotone Schaltkreis, der Δ berechnet, hat die Größe $\Omega(n^3/\log^4 n)$

<u>Beweis</u> mit <u>Approximationsmethode</u>

- Testinputs T_+ mit $\vec{x} \in T_+ \Rightarrow \Delta(\vec{x}) = 1$
  Testinputs T_- mit $\vec{x} \in T_- \Rightarrow \Delta(\vec{x}) = 0$
- Approximatoren: „einfache" Schaltkreise
- <u>Ziel 1</u>: Jeder Approximator A hat $A(\vec{x}) \neq \Delta(\vec{x})$ für viele Testinputs $\vec{x}$
- <u>Ziel 2</u>: Kleien Schaltkreise haben gute Approximatoren, d.h. $size(c)$ klein => es gibt Approximator $\hat{c}$ mit:
  $c(x) \leq \hat{c}(x)$ für die meisten $\vec{x} \in T_+$
  $c(x) \geq \hat{c}(x)$ für die meisten $\vec{x} \in T_-$

Testinputs:

$T_+ \quad := \quad$ wähle3 Punkte i, j, k, setze $x_{ij} = x_{jk} = x_{ik} = 1$,sonst 0

$\Rightarrow \ |T_+| = \binom{n}{3}$

$T_- \quad := \quad$ färbe V in 2 Farben, verbinde verschiedenfarbige Punkte

$\Rightarrow \ |T_-| = 2^{n-1}$

Approximatoren:

Ein k-Approximator ist eine Disjunktion $\bigvee_{i \le r} x_i$ vor $r \le k$ Variablen.

Lemma 2: (Ziel (1))

Für k-Approximator A mit $A \not\equiv 0$ ist die Zahl der $\vec{x} \in T_-$ mit $A(\vec{x}) = 1$ mindestens 2^{n-2}

Beweis:

Ist $A \not\equiv 0$, so ist $A = x_{i_1 j_1} \vee \ \ldots \ \vee x_{i_r j_r}$. Betrachte $x_{i_1 j_1} = 1$ wenn i_1 und j_1 verschiedene Farben haben. Das ist für 2^{n-2} der $\vec{x} \in T_-$ der Fall.

Konstruktion der Approximatoren:

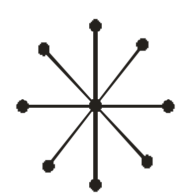
Eine Variable ist ein k-Approximator.

Für je 2 k-Approximatoren A und A' definieren wir $A \sqcup A'$ und $A \sqcap A'$, die Disjunktion/Konjunktion von A, A' approximieren.

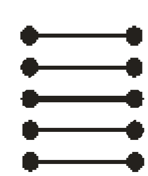
Dazu ein paar graphentheoretische Lemmas:

Definition:

- Ein Stern ist ein Graph, der Form $E = \{(i, j_1), \ (i, j_2), \ldots \ (i, j_m)\}$ und i heißt Zentrum des Sterns



- Ein Matching ist ein Graph mit $e \cap e' = \emptyset$ für $e, e' \in E$



- zwei Graphen (V, E_1) und (V, E_2) sind disjunkt, falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Lemma 3:

Sei **S** ein Stern mit $\mathbf{k}$ Knoten. Dann ist die Anzahl der $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{T}_{-}$, die disjunkt zu **S** sind, 2^{n-k-1}

Beweis:

Damit $\vec{\mathbf{x}}$ von S disjunkt ist müssen also $\mathbf{k+1}$ Knoten, die **S** berührt, die gleiche Farbe haben. Es gibt $2^{n-(k+1)}$ Möglichkeiten, die restlichen zu färben.

Lemma 4:

Sei **M** ein Matching mit $\mathbf{k}$ Knoten. Dann ist die Anzahl der $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{T}_{-}$, die disjunkt zu **M** sind, 2^{n-k-1}

Beweis:

Jedes Paar, das im **M** verbunden ist, muss gleichfarbig sein. Es bleiben $\mathbf{n-2k}$ isolierten Punkte. Also gibt es $2^{(n-2k)+k-1}$ Möglichkeiten zu färben.

Lemma 5:

Jeder Graph mit $\mathbf{m}$ Kanten enthält entweder einen Stern oder ein Matching mit $(m/2)^{1/2}$ Kanten.

Beweis:

Sei $\mathbf{s}$ die Maximale Größe eines Sterns in $G=(V,E)$ mit $|E| = m$. Wähle ein Matching $\mathbf{m}$ wie folgt:

```
M:= Ø; R:= E;
while R ≠ Ø
      wähle Kante {i,j} aus R;
      M := M U {{i,j}};
      entferne aus R alle Kanten e mit e ∩ {i,j} ≠Ø;
```

Da in jedem Durchlauf höchstens $\mathbf{2s-1}$ Kanten aus **R** entfernt werden (sonst wäre ein Stern größer als $\mathbf{s}$) gibt es mindestens $^{m}/_{(2s-1)}$ Schleifendurchläufe, also $|M| \geq {}^{m}/_{(2s-1)}$. Behauptung folgt, da

$$\max(s, \ ({}^{m}/_{(2s-1)})) \overset{(*)}{\geq} ({}^{m*s}/_{(2s-1)})^{1/2} > (m/2)^{1/2}$$

$(*)$ gilt wegen $\max(a,b) = (a*b)^{1/2}$ also

$$\max(s, \ ({}^{m}/_{(2s-1)})) \geq ({}^{m*s}/_{(2s-1)})^{1/2} \geq (m/2)^{1/2}$$

Lemma 6:

Sei $G=(V,E)$ mit $|E|=m$ beliebig. Dann ist die Zahl der $\vec{x}\in T_-$ disjunkt zu G höchsten $2^{n-(m/2)^{1/2}-1}$

Beweis:

Folgt sofort aus Lemmas 3,4,5

Nun ist $A_1=\bigvee^{k_1}_{q=1} x_{i_q j_q}$ und $A_2=\bigvee^{k_2}_{r=1} x_{i_r j_r}$, dann definiere:

$$A_1 \sqcup A_2 := \begin{cases} A_1 \vee A_2 = \bigvee^{k_1}_{q=1} x_{i_q j_q} \vee \bigvee^{k_2}_{r=1} x_{i_r j_r}, & \text{falls } k_1+k_2 \le k \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Klar ist $A_1 \sqcup A_2 \ge A_1 \vee A_2$

Lemma 7:

Die Anzahl der $\vec{x}\in T_-$ mit $A_1 \vee A_2 = 0$ und $A_1 \sqcup A_2 = 1$ ist höchstens $2^{n-(k/2)^{1/2}-1}$

Beweis:

$A_1 \vee A_2 = 0$ gilt wenn der Graph (V,E) mit

$$E = \{\{i_q,j_q\}, q\le k_1\} \cup \{\{i_r,j_r\}, r\le k_2\}$$

disjunkt zu $\vec{x}$ ist. Da $|E|= k_1+k_2 \ge k$, ist dies nach Lemma 6 für höchstens $2^{n-(m/2)^{1/2}-1}$ $\vec{x}\in T_-$ der Fall.

Es ist $A_1 \wedge A_2 = \bigvee_{q\le k_1, r\le k_2} x_{i_q j_q} \wedge x_{i'_r j'_r}$ geschrieben als

$$\bigvee_{q\le k_3} x_{i_q j_q} \bigvee_{r\le k_4} x_{i'_r j'_r} \wedge x_{i''_r j''_r} \text{ mit } k_3\le k,\ k_4\le k^2.$$

Definiere :

$$A_1 \sqcap A_2 := \bigvee_{q\le k_3} x_{i_q j_q}$$

Lemma 8:

Die Anzahl der $\vec{x}\in T_+$ mit $A_1(x) \wedge A_2(x) = 0$ ist höchstens k^2

Beweis:

Dies ist nur möglich, falls x ein Dreieck $\{i,j,k\}$ ist, und $\{i'_r j'_r\}$, $\{i''_r j''_r\}$ Kanten von $\{i,j,k\}$ sind. Das kann für maximal $k_4\le k^2$ Tupel $\{i,j,k\}$ der Fall sein.

Beweis von Theorem 2:

Sei $\mathbf{C}$ monotone Schaltkreis (mit f 2) der Δ berechnet, der Größe $\mathbf{s}$ (Anzahl $\wedge, \vee$ - Gatter)

Konstruiere Approximator A_c induktiv:

Für input x_{ij} $\quad A_c = x_{ij}$

Für $C=C_1 \vee C_2$ $\quad A_c = A_{c_1} \sqcup A_{c_2}$

Für $C=C_1 \wedge C_2$ $\quad A_c = A_{c_1} \sqcap A_{c_2}$

Nach Lemma 7

Anzahl $\vec{x} \in T_-$ mit $A_c(\vec{x})=1$ ist $\leq s*2^{n-(k/2)^{1/2}-1}$

Nach Lemma 8

Anzahl $\vec{x} \in T_+$ mit $A_c(\vec{x})=0$ ist $\leq s*k^2$

Nach Lemma 2 ist entweder

$$A \equiv 0\text{, also } s*k^2 \geq \binom{n}{3}\text{, also } s \geq \binom{n}{3} \Big/ k^2$$

oder

$$s*2^{n-(k/2)^{1/2}-1} \geq 2^{n-2}\text{, also } s \geq 2^{(k/2)^{1/2}-1}$$

Für $k=18*\log^2 n$ folgt

$$s \geq \binom{n}{3} \Big/ 18^2\log^4 n$$

oder

$$s \geq 2^{3*\log(n)-1} \geq n^3/2$$

1. Wert ist kleiner, also folgt

$$\text{size}(c) \geq \binom{n}{3} \Big/ 18^2\log^4 n = \Omega(n^3/\log^4 n)$$